Chapitre 1 : THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ENSEMBLES CONSTRUCTION DE $\mathbb{R}$

1.1. Éléments de la théorie des ensembles

ENSEMBLE ET APPARTENANCE

1.1.1. Définition

On appelle ensemble une collection d'objets : ces objets sont les éléments de l'ensemble.

1.1.2. Exemples

1) Les entiers $0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ forment un ensemble appelé l'ensemble des entiers naturels et noté $\mathbb{N}$.

2) Les entiers $\cdots -4, -3, -2, -1, \cdots 1, 2, 3, 4, \cdots$ forment l'ensemble des entiers rationnels que l'on note $\mathbb{Z}$.

3) On désigne par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $-\frac{1}{4}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{18}, 0, 1, 4, \frac{1}{2}, \cdots$

Soit E un ensemble. Pour dire qu'un objet x est un élément de E, on écrit $x \in E$ et on lit « x appartient à E », et pour dire que x n'est pas un objet de E on écrit $x \notin E$ et on lit « x n'appartient pas à E ».

Un ensemble est vide s'il n'a aucun élément ; l'ensemble vide est noté $\emptyset$.

Inclusion — Soient E et F deux ensembles. On dit que E est *inclus* dans F et on note $E \subset F$ ou $F \supset E$ si tout élément de E est élément de F. On dira alors que E *est un sous-ensemble de* F ou que E est une partie de F.

$E = F$ si $E \subset F$ et $F \subset E$.

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES ENSEMBLES

Intersection — Soient E et F deux ensembles. Leur intersection est l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément à E et à F ; cet ensemble se note $E \cap F$. Si $E \cap F = \emptyset$ on dit que E et F sont disjoints.

Réunion — La réunion des ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F: cet ensemble se note $E \cup F$.

Complémentaire — Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle complémentaire de A par rapport à E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A : on note cet ensemble $\complement_E A$.

Propriétés des opérations élémentaires

Proposition

Soient A, B et C trois parties d'un même ensemble E. Alors :

1) $A \cap B = B \cap A$

2) $A \cup B = B \cup A$

3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$

6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

7) $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$

8) $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$

Démonstration

1) $x \in A \cap B$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$ si et seulement si $x \in B$ et $x \in A$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in B \cap A$.

2) $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$, donc $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in B$ ou $x \in A$, ce qui revient à dire que $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in B \cup A$.

3) $x \in (A \cap B) \cap C$ si et seulement si $x \in A \cap B$ et $x \in C$, ce qui équivaut à $x \in A$ et $x \in B$ et $x \in C$.

De même $x \in A \cap (B \cap C)$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B \cap C$ et cela équivaut à $x \in A$ et $x \in B$ et $x \in C$.

4) $x \in (A \cup B) \cup C$ si et seulement si $x \in A \cup B$ ou $x \in C$, donc si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$. D'autre part $x \in A \cup (B \cup C)$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$.

5) $x \in A \cap (B \cup C)$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B \cup C$. Ainsi $x \in A \cap (B \cap C)$ si et seulement si ($x \in A$ et $x \in B$) ou ($x \in A$ et $x \in C$) ce qui équivaut à $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$.

6) $x \in A \cup (B \cap C)$ équivaut à $x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$ et cette dernière relation équivaut à ($x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$).

7) $x \notin \complement_E A \cup \complement_E B$ équivaut à $x \notin \complement_E A$ et $x \notin \complement_E B$. Autrement dit $x \notin \complement_E A \cup \complement_E B$ équivaut à : $x \in A$ et $x \in B$. Donc $x \notin \complement_E A \cup \complement_E B$ si et seulement si $x \notin \complement_E(A \cap B)$.

8) Posons $A' = \complement_E A$ et $B' = \complement_E B$. On a, d'après 7), $\complement_E(A' \cap B') = \complement_E A' \cup \complement_E B'$ D'où : $A' \cap B' = \complement_E(A \cup B)$.

1.2. Construction de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

1.2.1. Définition

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ converge vers un élément a de $\mathbb{Q}$ si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'inégalité $n > n_0$ entraîne $|x_n - a| < \varepsilon$.

DÉFINITION

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ est *dite de Cauchy* si, quel que soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les inégalités $p > n_0$ et $q > n_0$ entraînent $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

1.2.2. Proposition

Toute suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$, convergeant dans $\mathbb{Q}$ est de Cauchy.

Démonstration — Supposons que (x_n) converge vers $a \in \mathbb{Q}$ et soit $\varepsilon > 0$, ($\varepsilon \in \mathbb{Q}$). Il existe n_0 tel que l'inégalité $n > n_0$ entraîne $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > n_0$ et $q > n_0$. Alors

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - a| + |x_q - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

1.2.3. Proposition

Toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$ est bornée.

Démonstration — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, ($x_n \in \mathbb{Q}$). Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $n \geq n_0$ entraîne $|x_n - x_{n_0}| < 1$.

On a donc, pour $n \geq n_0$, $x_{n_0} - 1 < x_n < x_{n_0} + 1$.

Posons $M = \mathrm{Max}[\{x_n \ / \ n < n_0\} \cup \{x_{n_0} + 1\}]$ et $m = \mathrm{Min}[\{x_n \ / \ n < n_0\} \cup \{x_{n_0} - 1\}]$

On a alors $m < x_n < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.2.4. Proposition

Soient (x_n) et (y_n) deux suites à éléments dans $\mathbb{Q}$. Si (x_n) converge vers 0 et si (y_n) est bornée, alors la suite $(x_n y_n)$ converge vers 0.

Démonstration — Soit $M \in \mathbb{Q}$ et $M > 0$, tel que $|y_n| < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étant donné $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'inégalité $n > n_0$ entraîne $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M+1}$. Donc pour tout $n > n_0$, on a $|x_n y_n| < \frac{\varepsilon}{M+1} \cdot M < \varepsilon$.

1.2.5. Proposition

Si les suites (x_n) et (y_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ sont de Cauchy, alors les suites $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont de Cauchy.

Démonstration — Soit $M \in \mathbb{Q}$ tel que $|x_n| < M_0$ et $|y_n| < M_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $\varepsilon \in \mathbb{Q}\,(\varepsilon > 0)$ étant donné, il existe des entiers naturels n_0 et n_1 tels que pour $p, q \in \mathbb{N}$ les inégalités $p > n_0$ et $q > n_0$ entraînent $|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2M+2}$ et les inégalités $p > n_1$ et $q > n_1$ entraînent $|y_p - y_q| < \frac{\varepsilon}{2M+2}$

Posons $n_2 = \mathrm{Max}(n_0, n_1)$ et soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > n_2$ et $q > n_2$. On a alors

$$|(x_p + y_p) - (x_q + y_q)| \leq |x_p - x_q| + |y_p - y_q| < \frac{2\varepsilon}{2M+2} < \varepsilon$$
$$|(x_p - y_p) - (x_q - y_q)| \leq |x_p - x_q| + |y_p - y_q| < \frac{2\varepsilon}{2M+2} < \varepsilon$$
$$|x_p y_p - x_q y_q| \leq |x_p|\,|y_p - y_q| + |y_q|\,|x_p - x_q| < \frac{(2M)\varepsilon}{2M+2} < \varepsilon$$

1.2.6. Proposition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'eléments de $\mathbb{Q}$. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Alors il existe $\alpha > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n$, l'inégalité $n \geq n_0$ entraîne $|x_n| > \alpha$. De plus la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \geq n_0}$ est de Cauchy.

Démonstration — On va raisonner par l'absurde en supposant que $\forall \alpha > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m > n$ tel que $|x_m| < \alpha$. Soit $\alpha > 0$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ et $m \geq m_0$ entraînent $|x_m - x_n| < \alpha/2$.

Maintenant par l'hypothèse, il existe $n_1 > n_0$ tel que $|x_{n_1}| < \alpha/2$. $n \geq n_0$ entraîne alors $|x_n| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$. α étant quelconque, ceci signifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. D'où la contradiction.

— Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \geq n_0$ et $q \geq n_0$. On a $\left|\frac{1}{x_p} - \frac{1}{x_q}\right| = \frac{|x_p - x_q|}{|x_p x_q|} < \frac{4}{\alpha^2}|x_p - x_q|$, et comme la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est de Cauchy, il en résulte que la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \geq n_0}$ est aussi de Cauchy.

Posons $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels. Il résulte de la proposition 1.2.5. que $\mathscr{C}$ est un anneau commutatif pour l'addition et la multiplication définies comme suit :

$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$, $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n y_n)$.

Il est clair que la suite stationnaire (x_n) où $x_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est élément unité de cet anneau. Posons $\mathscr{C}_0$ l'ensemble des suites de nombres rationnels convergeant vers 0. $\mathscr{C}_0$ est un idéal de $\mathscr{C}$ d'après la proposition 1.2.4.

1.2.7. Proposition

$\mathscr{C}_0$ est un idéal maximal de l'anneau $\mathscr{C}$.

Démonstration — Soit (x_n) une suite de Cauchy ne convergeant pas vers 0. D'après la proposition 1.2.6, on peut supposer que $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et il résulte alors de la même proposition que la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)_n$ est de Cauchy et il est clair que le produit $(x_n)\left(\frac{1}{x_n}\right)$ est l'élément unité de $\mathscr{C}$. Comme $\mathscr{C}_0$ est un idéal maximal de $\mathscr{C}$, donc l'anneau-quotient $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ est un corps commutatif.

DÉFINITION

Le corps commutatif $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ est appelé droite numérique et désigné par $\mathbb{R}$. Ses éléments sont appelés nombres réels.

On peut constater facilement que l'application φ, qui consiste à associer à chaque nombre rationnel q la suite stationnaire (x_n) où $x_n = q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est un homomorphisme injectif de l'anneau $\mathbb{Q}$ dans l'anneau $\mathscr{C}$; de plus si q et q' sont des éléments de $\mathbb{Q}$ tels que $q \neq q'$, alors la suite (de Cauchy) $\varphi(q) - \varphi(q') = (x_n)$ où $x_n = q - q'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ne converge pas vers 0. Donc si l'on pose p la surjection canonique de $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{R}$ l'application $i = p \circ \varphi$ est un homomorphisme injectif du corps $\mathbb{Q}$ dans le corps $\mathbb{R}$. Le morphisme i permet d'identifier la classe modulo $\mathscr{C}_0$ des suites de Cauchy convergeant vers q au nombre rationnel q, et par la suite, de considérer $\mathbb{Q}$ comme sous-corps de $\mathbb{R}$.

1.2.8. Proposition

L'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est stricte.

Démonstration — Considérons la suite de nombres rationnels $(x_n)_{n \geq 0}$, où $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Pour $p > q$ on a $x_p - x_q = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} \cdots + \frac{1}{p!}$. Or

$$\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \cdots + \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{(q+1)!}\Big[1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(1+q)^2} + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{(1+q)^{p-q-1}}\Big],$$

$$\frac{1}{(q+1)!}\left[1+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(1+q)^2}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1}{(1+q)^{p-q-1}}\right]<\frac{1}{(q+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{1}{qq!}.$$

donc $|x_p - x_q| < \frac{1}{n}$ pour $p \geq q \geq n \geq 1$ ce qui prouve que $x = (x_n)$ est une suite de Cauchy c'est-à-dire un élément de $\mathscr{C}$. Montrons que le nombre réel $\overline{x}$ qui est la classe de (x_n) modulo $\mathscr{C}_0$ n'appartient pas $\mathbb{Q}$. Autrement dit que (x_n) ne converge pas vers un élément de $\mathbb{Q}$.

Supposons le contraire et soient $s \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{N}^*$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{s}{t}$. De l'inégalité $0 < x_p - x_q < \frac{1}{qq!}$ pour $p > q > 1$, on déduit, en faisant tendre p vers l'infini, l'inégalité suivante : (1) $0 < \frac{s}{t} - x_q \leq \frac{1}{qq!}$, car la suite (x_n) étant strictement croissante, on a $x_m < \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{s}{t}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

On prend $q > t$, comme $\frac{s}{t} - x_q$ est un élément de $\mathbb{Q}$, on peut écrire $\frac{s}{t} - x_q = \frac{d}{q!}$, où $d \in \mathbb{Z}$. (1) s'écrit donc $0 < \frac{d}{q!} \leq \frac{1}{qq!}$, d'où $0 < d \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$. Ce qui est impossible. Donc le nombre e de $\mathbb{R}$, classe modulo $\mathscr{C}_0$ de la suite $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ n'appartient pas $\mathbb{Q}$, on dit que e est irrationnel.

1.3. Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Nous allons munir $\mathbb{R}$ d'une relation d'ordre compatible avec sa structure de corps et qui prolonge l'ordre naturel de $\mathbb{Q}$.

Soit (x_n) un élément de $\mathscr{C}$. On dit (x_n) est strictement positif s'il existe $\beta \in \mathbb{Q}$, $\beta > 0$ et s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que l'inégalité $n > n_0$ implique $x_n > \beta$. On dit que (x_n) est strictement négatif si $(-x_n)$ est strictement positif. On note $\mathscr{C}_+^*$ l'ensemble des éléments strictement positifs de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_-^*$ l'ensemble des éléments négatifs de $\mathscr{C}$.

1.3.1. Proposition

$\mathscr{C}_+^*$, $\mathscr{C}_-^*$ et $\mathscr{C}_0$ forment une partition de $\mathscr{C}$.

Démonstration — Soit $(x_n) \in \mathscr{C}$. On a l'équivalence $(x_n) \in \mathscr{C}_0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, donc

$$\mathscr{C}_+^* \cap \mathscr{C}_0 = \mathscr{C}_-^* \cap \mathscr{C}_0 = \emptyset$$

Supposons qu'il existe $(x_n) \in \mathscr{C}_+^* \cap \mathscr{C}_-^*$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ tels que pour $n > n_0$ on ait : $-\gamma > x_n > \beta$, ce qui est impossible, donc $\mathscr{C}_+^* \cap \mathscr{C}_-^* \neq \emptyset$.

Soit $(x_n) \in \mathscr{C}$ tel que $(x_n) \in \mathscr{C}_+^* \cap \mathscr{C}_-^*$. Alors

$$(\forall \alpha > 0), (\alpha \in \mathbb{Q})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m_1 > n)(\exists m_2 > n)(x_{m_1} \leq \alpha \text{ et } -\alpha \leq x_{m_2}).$$

Soit $\varepsilon > 0\,(\varepsilon \in \mathbb{Q})$. Comme (x_n) est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les inégalités $n > n_0$ et $q > n_0$ entraînent $x_q - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x_q + \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient $m_1 > n_0$ et $m_2 > n_0$ tels que $x_{m_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $-\frac{\varepsilon}{2} \leq x_{m_2}$. On a alors :

$$x_n < x_{m_1} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad -\varepsilon \leq x_{m_2} - \frac{\varepsilon}{2} < x_n,$$

donc pour $n > n_0$ on a : $-\varepsilon < x_n < \varepsilon$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ c'est-à-dire $(x_n) \in \mathscr{C}_0$. D'où $\mathscr{C} = \mathscr{C}_+^* \cup \mathscr{C}_-^* \cup \mathscr{C}_0$. On note $\mathscr{C}_+ = \mathscr{C}_+^* \cup \mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_- = \mathscr{C}_-^* \cup \mathscr{C}_0$.

1.3.2. Proposition

Si $x = (x_n) \in \mathscr{C}_+$ et $y = (y_n) \in \mathscr{C}_+$, alors $x + y \in \mathscr{C}_+$ et $xy \in \mathscr{C}_+$.

Démonstration — Si $x \in \mathscr{C}_0$ et $y \in \mathscr{C}_0$, alors $x + y \in \mathscr{C}_0$ et $xy \in \mathscr{C}_0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n + \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

Si $x \in \mathscr{C}_+^*$ et $y \in \mathscr{C}_+^*$, alors il existe $\beta > 0$, $\beta \in \mathbb{Q}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$, il existe $\gamma > 0$, $\gamma \in \mathbb{Q}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour $n > \sup(n_1, n_2)$ on ait $x_n > \beta$ et $y_n > \gamma$. Donc, pour $n > \sup(n_1, n_2)$ on a : $x_n + y_n > \beta + \gamma$ et $x_n y_n > \beta\gamma$. Ce qui entraîne $x + y \in \mathscr{C}_+$ et $xy \in \mathscr{C}_+$.

Si $x \in \mathscr{C}_0$ et $y \in \mathscr{C}_+^*$, alors il existe $\beta > 0$, $\beta \in \mathbb{Q}$, et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que l'inégalité $n > n_0$ entraîne $y_n > \beta$; comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que l'inégalité $n > n_1$ entraîne $-\frac{\beta}{2} < x_n < \frac{\beta}{2}$. Donc pour $n > \sup(n_0, n_1)$ on a : $x_n + y_n > -\frac{\beta}{2} + \beta = \frac{\beta}{2}$.

D'où $x + y \in \mathscr{C}_+$. D'autre part on a $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n y_n = 0$. D'où $xy \in \mathscr{C}_0$.

1.3.3. Proposition

Soient $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ deux éléments de $\mathscr{C}$. Si x et y sont équivalentes modulo $\mathscr{C}_0$ et $x \in \mathscr{C}_+$ alors $y \in \mathscr{C}_+$.

Démonstration — $y - x \in \mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}_+$ et $x \in \mathscr{C}_+$ impliquent $y = (y - x) + x \in \mathscr{C}_+$.

REMARQUE

Il résulte de la proposition 1.3.2 que si $x \in \mathscr{C}_+$ et si y est un élément de la classe $\overline{x}$ de x dans $\mathbb{R}$, alors $y \in \mathscr{C}_+^*$. On dit que le nombre réel $\overline{x}$ est strictement positif. On peut vérifier que si $x' \in \mathscr{C}_-^*$ et $y' \in \overline{x'}$, alors

$y' \in \mathscr{C}_-^*$, on dit que $\overline{x'}$ est un nombre réel strictement négatif. Il est clair que si $x \in \mathscr{C}_0$, alors $\overline{x} = 0$ est le nombre réel non nul. On note :

$\mathbb{R}_+^* = \mathscr{C}_+^*/\mathscr{C}_0$ l'ensemble des réels strictement positifs.

$\mathbb{R}_-^* = \mathscr{C}_-^*/\mathscr{C}_0$ l'ensemble des réels strictement négatifs.

$\mathbb{R}_+ = \mathscr{C}_+/\mathscr{C}_0$ l'ensemble des réels positifs.

$\mathbb{R}_- = \mathscr{C}_-/\mathscr{C}_0$ l'ensemble des réels négatifs.

On a : $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.

1.3.4. Proposition

La relation $\leq$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$ est une relation d'ordre total compatible avec la structure de corps de $\mathbb{R}$ qui prolonge l'ordre naturel de $\mathbb{Q}$.

Démonstration — Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $y - x \in \mathbb{R}_+$ et $x - y \in \mathbb{R}_+$.

On a alors $y - x = -(x - y) \in \mathbb{R}_-$, donc $y - x \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-$. Ce qui entraîne $y - x = 0$, donc $x = y$.

Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que $y - x \in \mathbb{R}_+$ et $z - y \in \mathbb{R}_+$.

Alors $z - x = (z - y) - (y - x) \in \mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a $y - x \in \mathbb{R}_+$ ou $x - y \in \mathbb{R}_-$, ce qui entraîne $y \leq x$ ou $x \leq y$. Si x, x', y et y' sont des réels tels que $y - x \in \mathbb{R}_+$ ou $y' - x' \in \mathbb{R}_+$, alors $(y + y') - (x + x') = (y - x) + (y' - x') \in \mathbb{R}_+$.

Si x et x' sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}_+$ et $x' \in \mathbb{R}_+$, alors $xx' \in \mathbb{R}_+$. De plus il est clair que si a et b sont deux éléments de $\mathbb{Q}$ tels que $a \leq b$ dans $\mathbb{Q}$, alors $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$.

1.3.5. Proposition

La valeur absolue d'un nombre réel a est le nombre réel positif $|a| = \operatorname{Sup}(a, -a)$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on vérifie les propriétés suivantes :

1) $-|a| \leq a \leq |a|$

2) $|-a| = |a|$

3) $|a + b| \leq |a| + |b|$

4) $|ab| = |a||b|$

5) $|a| = 0 \iff a = 0$

1.4. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ Axiome d'Archimède

1.4.1. Théorème (Axiome d'Archimède)

Pour tout réel a, il existe un entier m tel que $m > a$.

Démonstration — Soit (x_n) un élément de $\mathscr{C}$ représentant a. La suite (x_n) étant bornée dans $\mathbb{Q}$, il existe $M = \frac{p}{q} \in \mathbb{R}$ et $M \geq 0$ ($p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) tel que $q|x_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(M - x_n)_n$ est une suite de rationnels positifs ou nuls, sa classe à savoir $M - a$ est positif ou nul dans $\mathbb{R}$. On a donc $\frac{p}{q} \geq a$, d'où $p \geq a$, car $p \geq \frac{p}{q}$. En prenant $m = p + 1$, on a $m > a$.

Corollaire 1 — Pour tout nombre réels a, b avec $a > 0$, il existe un entier p tel que $pa > b$.

Démonstration — Il existe un entier p tel que $p > \frac{b}{a}$, donc $pa > b$.

Corollaire 2 — Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel $\alpha > 0$ tel que $0 < \alpha < \varepsilon$.

Démonstration — Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p\varepsilon > 1$, donc, en posant $\alpha = \frac{1}{p}$, on a $0 < \frac{1}{p} < \varepsilon$.

1.4.2. Proposition

Pour tout nombre réel x et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier p unique satisfaisant à :

$$p\varepsilon \leq x < (p+1)\varepsilon$$

Démonstration — Il résulte du corollaire 1 du théorème 1.4.1 qu'il existe un entier n tel que $n\varepsilon \geq |x|$, soit $-n\varepsilon \leq x \leq n\varepsilon$. L'ensemble $B = \{m \in \mathbb{Z} \ / \ m\varepsilon \leq x\}$ est donc non vide, car $-n \in B$, et est majoré par n. Soit p le plus grand élément de B. On a $p\varepsilon \leq x < (p+1)\varepsilon$. Soit p' autre entier vérifiant $p'\varepsilon \leq x < (p'+1)\varepsilon$. On a alors les inégalités : $p'\varepsilon \leq x < (p+1)\varepsilon$ et $p\varepsilon \leq x < (p'+1)\varepsilon$ qui entraînent les inégalités $p' \leq p$ et $p \leq p'$, d'où $p = p'$.

1.4.3. Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *partie entière* de x l'unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x < p + 1$. On note

$$p = E(x) \quad \text{ou} \quad p = [x].$$

1.4.4. Proposition (Théorème de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

Démonstration — Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q(y - x) > 1$ et soit p l'unique entier satisfaisant : $p \cdot \frac{1}{q} \leq x < (p+1) \cdot \frac{1}{q}$. On a alors

$$x < \frac{p+1}{q} \text{ et } q\left(y - \frac{p}{q}\right) > 1, \text{ ce qui entraîne } x < \frac{p+1}{q} \text{ et } y > \frac{p+1}{q},$$

d'où $x < \dfrac{p+1}{q} < y$. Il suffit de prendre $r = \dfrac{p+1}{q}$.

Corollaire — Il existe entre deux réels distincts une infinité de nombres rationnels.

1.4.5. Proposition

Entre deux rationnels distincts il existe un irrationnel.

Démonstration — Soient x et y deux rationnels, $x < y$, et soit s un nombre irrationnel strictement positif (par exemple $s = e$). Il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q(y - x) > s$. On a alors

$$x < x + \frac{s}{q} < y \quad \text{et } x + \frac{s}{q} \text{ est irrationnel.}$$

1.4.6. Définition

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si entre deux éléments distincts quelconques dans $\mathbb{R}$, il existe un élément de A. Ainsi $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 2 : LIMITE ET CONTINUITÉ

Introduction

Le concept fondamental de l'analyse est le concept d'approximation : soit ε un nombre réel strictement positif. On dit que le réel x est une approximation de x_0 à ε près si $|x - x_0| < \varepsilon$. Si ε est assez petit (selon la précision souhaitée), on dira alors que x est voisin de x_0 et on notera $x \sim x_0$. Pour obtenir des énoncés mathématiques, il faut toujours indiquer à quelle précision un nombre est voisin d'un autre. De même on dira qu'un sous ensemble S de $\mathbb{R}$ est arbitrairement voisin d'un réel x_0, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in S$, qui approxime x_0 à ε près.

Soit une fonction réelle de la variable réelle $f : S \to \mathbb{R}$ où S est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ arbitrairement voisin de x_0. Peut-on approcher le nombre $f(x)$ pour $x \in S$ et voisin de x_0? La première idée est de dire que si $x \sim x_0$ alors $f(x) \sim l$ où l une constante réelle. Cela revient à approcher la fonction f par une constante : ce qui conduit au concept de limite de f au point x_0. Si f est définie en x_0 et $l = f(x_0)$, on a alors la notion de continuité de f en x_0. Dans les autres chapitres on cherchera à améliorer l'approximation de f par une fonction affine (notion de dérivée), ou une fonction polynôme (développements limités).

La définition de la continuité, exprimée en termes de propriétés du système des nombres réels, a été formulée pour la première fois par le mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Sa définition, encore utilisée de nos jours, est plus facilement explicitée grâce au concept de limite que nous abordons d'abord dans la première partie de ce chapitre.

2.1. Sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$ Intervalles de $\mathbb{R}$

2.1.1. Définition

Un sous ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit majoré (respectivement minoré) s'il existe un nombre réel A tel que :

$$\forall x \in E, x \leq A \qquad \text{(resp. } x \geq A\text{)}$$

A s'appelle un majorant (resp. un minorant) de E ; E est dit borné s'il est majoré et minoré.

2.1.2. Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}$; une borne supérieure de E est un majorant M de E tel que, pour tout majorant A de E, on a $A \geq M$.

De même une borne inférieure de E est un minorant m de E tel que, $a \leq m$ pour tout minorant a de E.

2.1.3. Remarque

Si E admet une borne supérieure M (resp une borne inférieure m), alors M (resp m) est unique.

En effet, soit M' une autre borne supérieure, comme M est un majorant, $M \geq M'$, comme M' est un majorant, $M' \geq M$ d'où $M = M'$. On démontre de la même manière l'unicité de m. On notera alors: $M = \sup E$; $m = \inf E$.

La définition 2.1.2 est équivalente à la définition suivante.

2.1.4. Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}$, M est la borne supérieure de E si et seulement si

i) $\forall x \in E, x \leq M$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x > M - \varepsilon$.

De même m est la borne inférieure de E si et seulement si :

i) $\forall x \in E, x \geq m$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x < m + \varepsilon$.

2.1.5. Définition

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dira que f est majorée (resp. minorée) sur E, si $f(E)$ est majoré (resp. minoré) dans $\mathbb{R}$.

La borne supérieure M (resp. la borne inférieure m) de f sur E est la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de $f(E)$, si elle existe.

Notation : $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$; $m = \inf\limits_{x \in E} f(x)$.

2.1.6. Exemples

1) L'ensemble des entiers positifs n'est pas majoré (proposition 2.1.8), par contre il est minoré et 0 est sa borne inférieure.

2) $E = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ *et* $x^2 < 2\}$ *est bornée:* $0 = \inf E$, *et* $\sqrt{2} = \sup E$. *On remarque que la borne supérieure* $\sqrt{2}$ *n'appartient pas à* E.

3) $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ *est borné. 1 est la borne supérieure et 0 est la borne inférieure qui n'appartient pas à* E.

2.1.7. Propriété fondamentale

L'ensemble des nombres réels possède une propriété fondamentale, que ne vérifie pas l'ensemble des nombres rationnels, et qu'on admettra dans la suite :

— tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ majoré admet une borne supérieure;

— tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ minoré admet une borne inférieure.

Comme application de la propriété 2.1.7, on a la proposition suivante :

2.1.8. Proposition

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$. En particulier si $a \in \mathbb{R}$ est tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq a < \frac{1}{n}, \qquad \text{alors } a = 0$$

Démonstration — Supposons qu'il existe un nombre réel b majorant $\mathbb{N}$.

On aura $b \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après 2.1.7, $\mathbb{N}$ admet une borne supérieure $M > 0$ comme $1 > 0$, on a $M < M + 1$.

Donc $M - 1 < M$ et $M - 1$ n'est pas un majorant ; donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M - 1 < n_0$; d'où $M < 1 + n_0$. Comme $1 + n_0 \in N$; on a la contradiction.

— Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq a < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; si $a \neq 0$, alors $n < \frac{1}{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ce qui est impossible d'après ce qui précède.

En particulier si $a \in \mathbb{R}_+$ est tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $a < \varepsilon$, alors $a = 0$. Nous aurons à utiliser ce résultat à maintes reprises par la suite.

2.1.9. Définition

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des formes suivantes :

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$; $\quad [a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$;

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$; $\quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$;

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}/x \leq a\}$; $\quad]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}/x < a\}$;

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/x \geq a\}$; $\quad]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/x > a\}$; $\qquad \mathbb{R}$; $\emptyset$.

Un intervalle peut être caractérisé par une propriété locale comme le montre l'énoncé suivant :

2.1.10. Proposition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si

$$\forall a \in I, \forall b \in I, \quad a < b \Rightarrow [a, b] \subseteq I. \tag{1}$$

Démonstration — Supposons $I \neq \emptyset$. La condition (1) est évidemment nécessaire d'après 2.1.9 ; elle est suffisante : en effet si I n'est ni majoré, ni minoré, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $a, b, \in I$ tels que $a < x < b$, donc d'après (1) $x \in I$ et $I = \mathbb{R}$. Si I est majoré et non minoré, soit $b = \sup I$; pour tout $x < b$ il existe alors $a, c \in I$, tels que $a < x < c \leq b$, donc $x \in I$, et I ne peut être que $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, b[$.

Par un raisonnement analogue on montre que si I est minoré et non majoré $I =]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$, où $a = \inf I$.

Si I est majoré et minoré le même argument montre que I a l'une des formes suivantes : $[a, b]$; $]a, b[$; $]a, b]$; $[a, b[$ avec $a = \inf I, b = \sup I$.

2.1.11. Extrémités et points intérieurs d'un intervalle

2.1.11.1. Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *extrémités de* I, $\inf I$ et $\sup I$, quand ils existent.

Un point $x_0 \in I$ est *un point intérieur de* I si et seulement si :

$\exists \alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$. On note $\overset{\circ}{I}$ l'ensemble des points intérieurs de I. On dira que I est *ouvert* si et seulement si : $I = \overset{\circ}{I}$.

2.1.11.2. Propriétés

On établit facilement les propriétés suivantes :

1) Les extrémités de I, quand elles appartiennent à I, ne sont pas des points intérieurs de I.

2) Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $I \subset J$, alors $\overset{\circ}{I} \subset \overset{\circ}{J}$.

3) Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, il en est de même de $\overset{\circ}{I}$.

4) $\overset{\circ}{I} = I -$ (les extrémités de I).

2.2. Limites

2.2.1. Définition

On appelle voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$ de rayon $\alpha > 0$, et on note $V_\alpha(x_0)$, l'intervalle ouvert centré en x_0 : $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.

2.2.2. Définition

Soit S un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dira que S est arbitrairement voisin de x_0, et on notera $S \sim x_0$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in S$ tel que $|x - x_0| < \varepsilon$.

En d'autres termes :

$$S \sim x_0, \Leftrightarrow \forall \alpha > 0. \quad S_\alpha = S \cap V_\alpha(x_0) \neq \emptyset.$$

S_α s'appelle la *trace* dans S du voisinage $V_\alpha(x_0)$

2.2.3. Remarques

1) S est arbitrairement voisin de chacun de ses points. Un point $x \in S$ tel qu'il existe $V_\alpha(x)$, vérifiant $V_\alpha(x) \cap S = \{x\}$ s'appelle un point isolé de S.

2) Si $S \sim x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, tout sous ensemble S' de S n'est pas nécessairement arbitrairement voisin de x_0. Par contre si S' est la trace dans S d'un voisinage de x_0, alors $S' \sim x_0$.

2.2.4. Définition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, S une partie de $\mathbb{R}$ arbitrairement voisine de x_0, et $f : S \to \mathbb{R}$ une application. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dira que $f(x)$ a pour limite l quand x tend vers x_0, en restant dans S, si et seulement si :

$$\boxed{\forall V_\varepsilon(l), \exists V_\delta(x_0) \quad \text{tel que } f\left(S \cap V_\delta(x_0)\right) \subset V_\varepsilon(l)}$$

ou en faisant intervenir les rayons des voisinages :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \left(|x - x_0| < \delta, \text{et } x \in S \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)}$$

Ce qu'on notera par :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l \qquad \text{ou } f(x) \to l \quad \text{quand } x \to x_0$$

en omettant S, si le contexte ne laisse pas d'ambiguïté à ce sujet.

2.2.5. Remarques

1) Dans la définition 2.2.4 $V_\varepsilon(l)$ est en premier lieu spécifié : $V_\delta(x_0)$ pouvant alors dépendre de $V_\varepsilon(l)$.

2) La notion de limite de f en x_0 dépend de l'ensemble S. Toutefois :

2.2.6. Proposition

Soit $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, S \sim x_0$. Soit S' un sous-ensemble de S, tel que $S' \sim x_0$ si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S'}} f(x) = m$$

alors $l = m$. En particulier si f admet une limite en x_0, cette limite est unique.

Démonstration

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_1 > 0 : \begin{cases} |x - x_0| < \delta_1 \\ x \in S \end{cases} \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de même

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S'}} f(x) = m \Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : \begin{cases} |x - x_0| < \delta_2 \\ x \in S' \end{cases} \Rightarrow |f(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. Si $|x - x_0| < \delta$, avec $x \in S'$ alors

$$|l - m| \leq |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ainsi $|l - m| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $|l - m| = 0$ (Proposition 2.1.8) et $l = m$.

2.2.7. Proposition

Soit $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, S \sim x_0$

et $S_\alpha = S \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \alpha > 0$. Alors :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S_\alpha}} f(x) = l.$$

Démonstration

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall V_\varepsilon(l), \exists V_\delta(x_0), f\left(S \cap V_\delta(x_0)\right) \subseteq V_\varepsilon(l).$$

Puisque $S_\alpha \sim x_0, S_\alpha \cap V_\delta(x_0) \neq \emptyset$ et

$f\left(S_\alpha \cap V_\delta(x_0)\right) \subseteq f\left(S \cap V_\delta(x_0)\right) \subseteq V_\varepsilon(l)$

d'où $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S_\alpha}} f(x) = l$. Réciproquement on a,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S_\alpha}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall V_\varepsilon(l), \exists V_{\delta_1}(x_0), f\left(S_\alpha \cap V_{\delta_1}(x_0)\right) \subseteq V_\varepsilon(l).$$

Soit $\delta_2 = \inf(\alpha, \delta_1)$,

$$S \cap V\delta_2(x_0) = S_\alpha \cap V\delta_2(x_0) \subseteq S_\alpha \cap V_{\delta_1}(x_0)$$

et par suite

$$f\left(S \cap V\delta_2(x_0)\right) \subseteq V_\varepsilon(l)$$

donc : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l$.

2.2.8. Remarques et exemples

1) Pour chercher la limite de $f(x)$ au point $x_0, x_0 \in S$ et $S \sim x_0$, on pourra se restreindre à la trace S' d'un voisinage de x_0 sur S.

2) Si $f(x) \to l$ quand $x \to x_0$, $x \in S$, alors pour tout sous-ensemble S' de S tel que $S' \sim x_0$ on a : $f(x) \to l$ quand $x \to x_0$, $x \in S'$.

La réciproque n'est pas vraie en général. En effet soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

alors pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{\substack{x \to q \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = 1$, *alors que* $\lim\limits_{\substack{x \to q \\ x \in \mathbb{R}}} f(x)$ *n'existe pas. En effet, on sait que tout intervalle ouvert non vide contient au moins un nombre irrationnel ; d'où pour tout* $\alpha > 0$. $f(\mathbb{R} \cap V_\alpha) = f(V_\alpha) = \{0, 1\}$.

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $f(V_\alpha(q)) \not\subset]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[= V_{\frac{1}{2}}(1)$, $\forall \alpha > 0$. *D'où* $\lim\limits_{\substack{x \to q \\ x \in \mathbb{R}}} f(x)$ *n'existe pas, car elle serait égale à 1 d'après la proposition 2.2.6.*

3) Soient : $S^+ = \{x \in S, x > x_0\}$, $S^- = \{x \in S, x < x_0\}$. *Si* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S^+}} f(x) = l_1$ *on dira que* l_1 *est la limite à droite de* $f(x)$ *en* x_0, *et on écrira :* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$.

De même si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S^-}} f(x) = l_2$, *on dira que* l_2 *est la limite à gauche de* $f(x)$ *en* x_0 *et on écrira :* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) \text{ existe } \Leftrightarrow l_1 \text{ et } l_2 \text{ existent et } l_1 = l_2.$$

4) Si $f(x) = c$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ *pour tout* x_0 *de* $\mathbb{R}$.

Si $f(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$ *pour tout* x_0 *de* $\mathbb{R}$.

5) Il arrive en général que la limite à droite en x_0 *soit différente de la limite à gauche de* x_0, *les deux limites étant elles-mêmes différentes de la valeur de la fonction en* x_0. *Soit* $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

On a :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1; \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1; \ f(0) = 0.$$

6) Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l$, *alors il existe* $k > 0$ *et un voisinage* $V(x_0)$ *de* x_0, *tels que :* $\forall x \in V(x_0) \cap S$, $|f(x)| \leq k$.

On dira alors que f *est bornée « au voisinage » de* x_0.

En effet : pour $\varepsilon = 1$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que si* $|x - x_0| < \delta$, $x \in S$, $|f(x) - l| < 1$ *d'où* $|f(x)| < |l| + 1$.

Cette remarque peut servir pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point ; il suffit de montrer qu'elle n'est bornée dans aucun voisinage de ce point. Ainsi la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ *n'a pas de limite en 0.*

2.2.9. Limite en $+\infty$ et $-\infty$

Soit $S \subseteq \mathbb{R}$, contenant des nombres positifs aussi grands que l'on veut, c'est-à-dire: pour tout $A > 0$, il existe $x \in S$ tel que $x > A$. On notera $S \sim +\infty$.

Soit $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On veut définir la limite de $f(x)$ quand x devient très grand en restant dans S (on écrira $x \to +\infty$, $x \in S$). On suppose que tous les éléments de S sont strictement positifs. Soit $S_1 = \{\frac{1}{x}, x \in S\}$, alors $S \sim +\infty$ entraîne $S_1 \sim 0$.

Posons $X = \frac{1}{x}$ et $g(X) = f\left(\frac{1}{X}\right) = f(x)$. $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X \in S_1}} g(X) = l$ équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (0 < X < \delta, X \in S_1) \Rightarrow |g(X) - l| < \varepsilon.$$

ou encore en posant $X = \frac{1}{x}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A = \frac{1}{\delta} > 0,\ (x > A, x \in S) \Rightarrow |f(x) - l| = \left|g(\frac{1}{x}) - l\right| < \varepsilon.$$

d'où :

2.2.9.1. Définition

$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} f(x) = l$ si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ x > A \text{ et } x \in S \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Remarque : On peut étendre la définition 2.2.9.1 à une fonction

$$f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad S \sim +\infty,$$

même si S contient des nombres négatifs ou nuls. En effet par un raisonnement analogue à 2.2.7, en considérant $S_A = [A, +\infty[\cap S$, $A > 0$, on montrera facilement que :

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S_A}} f(x) = l. \tag{1}$$

Autrement dit la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ ne dépend que des valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, $x \in S$.

De même, soit $S \subseteq \mathbb{R}$, posons $S' = \{-x, x \in S\}$. On dira que $S \sim -\infty$ si et seulement si $S' \sim +\infty$.

2.2.9.2. Définition

Soit $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $S \sim -\infty$. Posons $X = -x$ et $g(X) = f(-x)$

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \in S}} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{X \to +\infty \\ X \in S'}} g(X) = l.$$

Par un même raisonnement que dans 2.2.9.1 on obtient :

2.2.9.3. Définition

$\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \in S}} f(x) = l$, si et seulement si :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, tel que si $x < -A$ et $x \in S$, on a : $|f(x) - l| < \varepsilon$.

2.2.9.4. Remarques

Les définitions 2.2.9.1 et 2.2.9.2 ramènent la définition de limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$, à celle d'une fonction en 0. Donc tous les théorèmes qui vont suivre sur les limites en $x_0 \in \mathbb{R}$ seront valables pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$. En particulier la proposition 2.2.6 et la remarque 2.2.8, 6) s'énoncent ainsi pour $+\infty$ par exemple :

2.2.9.5. Proposition

Si $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} f(x) = l$, alors l est unique.

En outre, il existe $k > 0$ et $A > 0$, tels que si $x > A$, $x \in S$, alors $|f(x)| \leq k$. On dira alors que f est bornée au « voisinage » de $+\infty$.

2.2.10. Limite d'une suite

Un cas important est celui où $S = \mathbb{N}^*$: Une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ est appelée une suite. En posant $f(n) = x_n$, une suite de nombres réels sera alors notée par $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ ou simplement (x_n). La notion de suite extraite d'une autre suite jouera un rôle important dans la suite.

2.2.10.1. Définition

Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ une suite de nombres réels : une suite extraite de f est un suite $f \circ \varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ où φ est application strictement croissante de $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$.

Notation : Si $f(n) = x_n$, on notera $(f \circ \varphi)(k) = x_{\varphi(k)} = x_{n_k}$, où $\varphi(k) = n_k$.

2.2.10.2. Remarques

1) Si $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est strictement croissante alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout n.

Faisons un raisonnement par récurrence :

Pour $n = 1$, $\varphi(1) \geq 1$; supposons $\varphi(n) \geq n$, dans ce cas :

$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n \Rightarrow \varphi(n+1) \geq n+1$. D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) \geq n$.

2) pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 > A$. D'après 2.2.9, $\mathbb{N}^* \sim +\infty$ et on peut parler de limite d'une suite quand n devient grand.

2.2.10.3. Définition

Soit (x_n) une suite de nombres réels définie par l'application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. On dira que la suite (x_n) admet une limite l quand n devient grand et on écrira :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l, \text{ si et seulement si, } \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}} f(n) = l.$$

2.2.10.4. Remarque

Ainsi d'après 2.2.9.1, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : \text{si } n > A, \text{on a } |x_n - l| < \varepsilon.$$

Or il existe $n_0 \in N^*$ tel que $n_0 > A$; par suite si $n \geq n_0$ on a $|x_n - l| < \varepsilon$.

On peut alors remplacer A par n_0. On a donc :

2.2.10.5. Définition

Soit (x_n) une suite de nombres réels

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que si } n \geq n_0, \text{ alors } |x_n - l| < \varepsilon}$$

2.2.10.6. Remarques

1) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$, *on dira que la suite* (x_n) *est convergente, de limite* l

2) D'après 2.3.10.2, la définition de la limite d'une suite est ramenée à celle d'une fonction en $+\infty$. *Toutes les propriétés énoncées pour les limites de fonctions restent vraies pour les suites. On aura donc :*

$$\text{si } \lim_{n\to+\infty} x_n = l, \text{ alors } l \text{ est unique.}$$

En outre il existe $k > 0$, *et* $n_0 > 0$, *tels que si* $n \geq n_0$, $|x_n| \leq k$. *Ainsi une suite convergente est bornée.*

3) *Exemple :* Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nx} = 0$ pour tout x, $x \neq 0$ fixé.

Soit $x > 0$; pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon x$. Donc si $n \geq n_0$ on a $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0} \leq \varepsilon x$ et par suite $\dfrac{1}{nx} < \varepsilon$. On fait un raisonnement analogue pour $x < 0$.

Les propositions qui suivent établissent les propriétés fondamentales des limites pour les sommes, les produits, les quotients, les inégalités de fonctions ainsi que pour les fonctions composées.

2.2.11. Propriétés fondamentales

2.2.11.1. Proposition :

Soient $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $S \sim x_0$, $f : S \to \mathbb{R}$ et $g : S \to \mathbb{R}$, telles que :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = l \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} g(x) = m$$

alors :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} (f+g)(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} (f(x) + g(x)) = l + m.$$

Démonstration — Soit $\varepsilon > 0$; comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $\exists \delta_1 > 0$:

$$\forall x \in S, \left(|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

De même $\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in S. \left(|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Posons $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. Si $|x - x_0| < \delta, x \in S$. on a :

$$|f(x) + g(x) - l - m| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +x_0} (f+g)(x) = l + m$.

2.2.11.2. Remarque

Dans la démonstration de la proposition 2.3.11.1 nous avons utilisé le principe suivant: si une inégalité est vérifiée pour $|x - x_0| < \delta_1$ et une autre a lieu pour $|x - x_0| < \delta_2$, soit $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$; alors pour $|x - x_0| < \delta$ les deux inégalités sont vérifiées simultanément. Dans les preuves qui vont suivre, on utilisera souvent ce principe. On passera directement à δ, sans mentionner les $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$ intermédiaires.

2.2.11.3. Proposition

Soient $S \subset \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ et $g : S \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$.

si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m$

alors : $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = lm$

Démonstration

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \delta$. $x \in S$ on a :

$$|f(x) - l| < \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|m| + 1} \qquad \text{car} \quad \lim_{x \to +x_0} f(x) = l$$

$$|g(x) - m| < \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|l| + 1} \qquad \text{car} \quad \lim_{x \to +x_0} g(x) = m$$

$|f(x)| < |l| + 1$ (remarque 2.2.8. 6)

d'où

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - lm| &= |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \\ &\leq |f(x)|\,|g(x) - m| + |m|\,|f(x) - l| \\ &\leq (|l| + 1)\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|l| + 1} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|m| + 1}|m| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

2.2.11.4. Corollaire

Soient $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$.

2.2.11.5. Exemple

Soient $P(x)$ un polynôme en x, et $x_0 \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

En effet $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout p, $0 \leq p \leq n$.

$$\lim_{x \to x_0} x^p = x_0^p \qquad \text{(proposition 2.2.11.3)}$$

et

$$\lim_{x \to x_0} a_p x^p = a^p x_0^p \qquad \text{(corollaire 2.2.11.4)}$$

d'où

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) \qquad \text{(proposition 2.2.11.1)}$$

2.2.11.6. Remarque

Soient $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \neq 0$, alors : pour $\varepsilon = \left|\frac{l}{2}\right|$, il existe $\delta > 0$, tel que:

si $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - l| < \left|\frac{l}{2}\right|$,

d'où $\quad |f(x)| \geq |l| - \left|\frac{l}{2}\right| = \left|\frac{l}{2}\right| > 0.$

Ainsi si $\lim f(x) = l \neq 0$ alors $f(x)$ ne s'annule pas pour les points de S voisins de x_0.

2.2.11.7. Proposition

Soient $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$,

$$\text{si } \lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ et } l \neq 0, \quad \text{alors : } \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$$

Démonstration — Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \delta$, $x \in S$ on a :

$$|f(x) - l| < \left|\frac{l}{2}\right| \text{ et } |f(x) - l| < \varepsilon \left|\frac{l}{2}\right|^2 \tag{1}$$

D'après la remarque 2.2.11.6 on peut choisir δ tel que $f(x) \neq 0$ pour $|x - x_0| < \delta$, $x \in S$.

$$(1) \Rightarrow |f(x)| \geq \left|\frac{l}{2}\right| ;$$

par suite:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| &= \frac{|l - f(x)|}{|f(x)l|} \\ &\leq \frac{2}{|l|} \frac{|l - f(x)|}{|l|} \\ &\leq \frac{2}{l^2} \frac{\varepsilon l^2}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2.2.11.8. Corollaire

Soient $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, et $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \neq 0$ alors: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$.

2.2.11.9. Exemples

1) Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes en x, $x_0 \in \mathbb{R}$, tels que $Q(x_0) \neq 0$.

Comme $\lim_{x \to x_0} Q(x) = Q(x_0) \neq 0$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

2) Montrons que $\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = 0$. On peut se restreindre au cas où $S =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (2.2.8, 1)

On peut facilement démontrer géométriquement, en considérant le cercle trigonométrique, que :

$$|\sin x| \leq |x|. \tag{1}$$

De $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ et (1) on déduit

$$|\cos x - 1| = 2\left|\sin^2 \frac{x}{2}\right| \leq \frac{x^2}{2} \tag{2}$$

Pour $\varepsilon > 0$, soit $\delta_1 = \varepsilon$; si $|x| < \delta_1$,

$$\text{alors } |\sin x| \leq |x| < \varepsilon, \text{ d'où } \lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

De même soit $\delta_2 = \sqrt{2\varepsilon}$: si $|x| < \delta_2$

$$\text{alors } |\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2} < \frac{\delta_2^2}{2} = \varepsilon, \quad \text{d'où } \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Par suite d'après le corollaire 2.3.11.8

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{tg}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{2} = 0.$$

2.2.11.10. Proposition

Soient $S \subseteq \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$ et soit $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction positive. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et vaut l, alors $l \geq 0$.

Démonstration — Supposons $l < 0$; soit $\varepsilon = \dfrac{|l|}{2}$.

$\exists\delta > 0$ tel que $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap S$ entraîne $f(x) \in]l - \frac{|l|}{2}, l + \frac{|l|}{2}[$.

$l + \dfrac{|l|}{2} = \dfrac{l}{2} < 0$ implique $f(x) < 0$ $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap S$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Corollaire — Soit $S \sim x_0$ et soient $f : S \to \mathbb{R}$ et $g : S \to \mathbb{R}$ deux fonctions sur S telles que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in S$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m$, alors $l \leq m$.

Démonstration — La fonction $\varphi = g - f$ étant positive sur S, la proposition précédente entraîne $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi = m - l \geq 0$. D'où le résultat.

2.2.11.11. Remarque

Soient $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \sim x_0$, $f : S \to \mathbb{R}$, $g : S \to \mathbb{R}$, et $h : S \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, pour $x \in S_\alpha$, ($S_\alpha = V_\alpha(x_0) \cap S$), si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (x) = l$, alors : $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$.

Démonstration — Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\delta > 0$, $\left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{4}\right)$

$$\text{et} \qquad \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - l| < \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Par suite

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - l| + |g(x) - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

D'où

$$|h(x) - l| \leq |h(x) - f(x)| + |f(x) - l| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - l| < \varepsilon.$$

2.2.11.12. Exemple

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

On peut se restreindre au sous ensemble $S=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$: comme $\frac{\sin x}{x}$ est paire, on peut se restreindre à $S_1=]0,\frac{\pi}{2}[$: en effet si $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$, alors $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$.

Considérons la figure suivante :

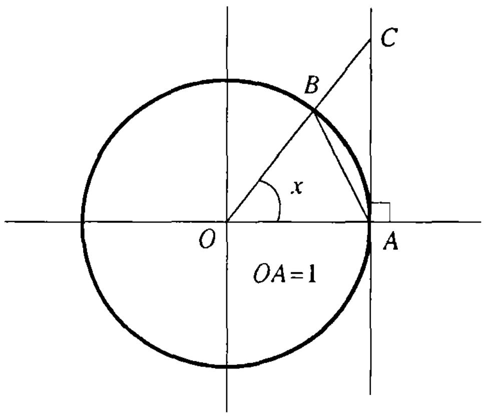

FIGURE: 2.1

On a pour $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{aligned}
\text{surface du triangle } AOB &< \text{surface du secteur circulaire } AOB\\
&< \text{surface du triangle } OAC\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\\
&\Rightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\quad \sin x>0\\
&\Rightarrow 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,\quad x\in]0,\frac{\pi}{2}[
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0+}\cos x=1$ et $\lim\limits_{x\to 0+}1=1$, on a $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$.

2.2.11.13. Proposition

Soient $f:S\to\mathbb{R}$, $g:T\to\mathbb{R}$ telle que $f(S)\subseteq T$, $x_0\in\mathbb{R}$ et $S\sim x_0$.
Si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=y_0$ et $T\sim y_0$, et si $\lim\limits_{y\to y_0}g(y)=l$, alors : $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=l$.

Démonstration — Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, $|y - y_0| < \delta$ et $y \in T$ entraînent (1) $|g(y) - l| < \varepsilon$; d'autre part il existe $\delta_1 > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \delta_1$ et $x \in S$, on a $|f(x) - y_0| < \delta$. D'où $|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x)) - l| < \varepsilon$.

2.2.11.14. Proposition

Soit $f : S \to \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $S \sim x_0$.

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de S convergeant vers x_0, la suite $f(x_n)$ converge vers l.

Démonstration — Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et soit $g = \mathbb{N}^* \to S$ une suite telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(n) = x_0$.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f\,[g(n)] = l$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$. (2.2.11.13)

Réciproquement supposons que pour toute suite (x_n) convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))$ converge vers l. Démontrons (par l'absurde) que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Supposons le contraire. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in S$ tel que $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. La suite (x_n) ainsi construite converge vers x_0, alors que la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers l, ce qui contredit l'hypothèse.

2.2.11.15. Exemples

1) Soit $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. *Montrons que* $f(x)$ *n'a pas de limite en 0.*

Soient les suites (x_n), (y_n) telles que $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

$$\text{or } f(x_n) = \sin n\pi = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$$

$$f(y_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = 1$$

d'après 2.2.11.14, $f(x)$ n'a pas de limite en 0.

2) Soit $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. *Montrons que* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Comme $f(x)$ est paire on peut se restreindre à $\mathbb{R}_+ - \{0\}$. Or

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x, \ (x > 0)$$

d'où d'après la proposition 2.2.11.11 $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

2.3. Application aux suites

En appliquant les résultats du 2.2 aux suites, on obtient :

2.3.1. Proposition

Soit (x_n) une suite convergente de limite l, alors :

a) l est unique.

b) $\exists k > 0, \exists n_0 > 0 : n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| \leq k$.

c) Si $l \neq 0, \exists n_0 > 0 : n \geq n_0 \Rightarrow x_n \neq 0$.

2.3.2. Proposition

Soient (x_n) et (y_n) deux suites convergentes de limites respectives l et m. Dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = l + m \;; \quad \lim_{n\to+\infty}(x_n y_n) = lm$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda x_n) = \lambda l \;; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m} \text{ si } m \neq 0.$$

2.3.3. Proposition

Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites telles que : $\exists n_0 > 0$, tel que pour $n \geq n_0$: $x_n \leq z_n \leq y_n$.

$$\text{si } \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = l, \quad \text{alors : } \lim_{n\to+\infty} z_n = l.$$

2.3.4. Suites monotones de nombres réels

2.3.4.1. Définition

Une suite (x_n) est dite *croissante* si $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Une suite (x_n) est dite *décroissante* si $x_n \geq x_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Une suite est appelée *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Les suites monotones sont agréables à étudier, car leur convergence ou leur divergence est facile à déterminer. En fait on a :

2.3.4.2. Proposition

Une suite monotone converge si et seulement si elle est bornée.

Démonstration — D'après la proposition 2.3.1 toute suite convergente est bornée.

Réciproquement soit (x_n) une suite monotone bornée. Supposons (x_n) croissante. (x_n) bornée équivaut à dire que le sous-ensemble $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ est majoré et minoré. Soit $L = \sup E$. Alors pour tout n, $x_n \leq L$.

D'après la définition de $\sup E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $x_{n_0} > L - \varepsilon$. Comme la suite est croissante, pour tout entier $n \geq n_0$, $x_n > L - \varepsilon$. D'où $|x_n - L| = L - x_n < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$ et par suite la suite (x_n) converge vers L.

Un raisonnement analogue s'applique dans le cas où (x_n) est décroissante en utilisant $l = \inf E$.

2.3.4.3. Remarque

Toute suite bornée n'est pas convergente comme le montre l'exemple $x_n = (-1)^n$. *Toutefois de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.*

2.3.4.4. Théorème (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration — Soit une suite (x_n). $x_n \in [a, b], a < b$, posons $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$, $n \in N^*$. $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots A_n \supset A_{n+1} \cdots$

A_n étant borné, soit $b_n = \inf A_n$; on a $b_n \leq b_{n+1}$, $\forall n \geq 1$; la suite (b_n) étant croissante et majorée, a une limite L.

Comme $b_n = \inf A_n$, $\forall \varepsilon > 0, \forall n, \exists m \geq n$ tel que $x_m < b_n + \varepsilon$ et $x_m \geq b_n$

Ainsi pour $\varepsilon = 1$, $\exists n_1 \geq 1$, $x_{n_1} < b_1 + 1$
pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2n_1}$, $\exists n_2 \geq 2n_1 > n_1$ tel que $x_{n_2} < b_{2n_1} + \dfrac{1}{2n_1}$,
pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2n_2}$, $\exists n_3 \geq 2n_2 > n_2$ tel que $x_{n_3} < b_{2n_2} + \dfrac{1}{2n_2}$,
pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2n_k}$, $\exists n_{k+1} \geq 2n_k > n_k$ tel que $x_{n_{k+1}} < b_{2n_k} + \dfrac{1}{2n_k}$.

L'application $k \to n_k$ est strictement croissante.

Comme $\lim b_n = L$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que, } n \geq n_0 \Rightarrow |b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit k_0 tel que $\dfrac{1}{k_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, et $k_1 \geq n_0$. Soit $k_2 = \sup(k_0, k_1)$; pour $k \geq k_2$, on a :

$$\begin{aligned}
|x_{n_k} - L| &\leq |x_{n_k} - b_{2n_k}| + |b_{2n_k} - L| \\
&\leq \frac{1}{2n_k} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{car } 2n_k > n_k \geq k \geq k_2 \geq n_0 \\
|x_{n_k} - L| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{car } \frac{1}{2n_k} < \frac{1}{k} < \frac{1}{k_2} < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Par suite (x_{n_k}) est une suite extraite de (x_n), convergeant vers L.

2.4. Suites de Cauchy

Une classe importante de suites convergentes dans $\mathbb{R}$ est constituée par les suites de Cauchy. En fait la propriété pour une suite d'être de Cauchy caractérise les suites convergentes dans $\mathbb{R}$.

2.4.1. Définition

Une suite (x_n) dans $\mathbb{R}$ est dite une suite de Cauchy si et seulement si :

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon), n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, tel que si $p, q \geq n_0$, alors $|x_p - x_q| \leq \varepsilon$.

2.4.2. Propriétés des suites de Cauchy

2.4.2.1. Toute suite (x_n) convergente est une suite de Cauchy

En effet si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que si $p, q \geq n_0$ on a : $|x_p - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|x_q - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

D'où:

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - l| + |x_q - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ε étant quelconque, (x_n) est une suite de Cauchy.

2.4.2.2. Une suite de Cauchy est bornée dans $\mathbb{R}$

Si (x_n) est une suite de Cauchy, alors pour $\varepsilon = 1$, $\exists n_0(1) \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geq n_0$, on a $|x_n - x_{n_0}| \leq 1$.

D'où $|x_n| \leq |x_{n_0}| + 1$ pour tout $n \geq n_0$.

Si $M = \sup(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{n_0}|, |x_{n_0}| + 1)$, alors $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2.4.2.3. Si une suite de Cauchy (x_n) admet une suite extraite (x_{n_k}) convergente vers un point l, alors (x_n) converge vers l

Soit (x_n) est une suite de Cauchy : soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $p, q \geq n_0$ alors : $|x_p - x_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Supposons que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = l$: $\exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $k \geq k_0$, $|x_{n_k} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $k_1 = \sup(n_0, k_0)$ alors pour $n \geq k_1$ on a :

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$.

Les résultats ci-dessous nous permettent d'énoncer l'important critère de Cauchy pour la convergence des suites de $\mathbb{R}$.

2.4.3. Théorème (critère de convergence de Cauchy)

Une suite de nombres réels (x_n) est convergente si et seulement si elle est une suite de Cauchy.

Preuve: si (x_n) est convergente, d'après 2.4.2.1, (x_n) est de Cauchy.

Réciproquement si (x_n) est une suite de Cauchy, elle est bornée d'après 2.4.2.2.

Mais d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, de la suite (x_n), on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) convergente. Donc d'après 2.4.2.3, la suite (x_n) converge vers la même limite que la suite (x_{n_k}).

2.4.4. Exemple

Soit la suite (x_n) définie par :

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \cdots, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}) \quad \text{pour } n > 2.$$

Cette suite n'est pas une suite monotone. Il est facile de voir que

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|; \quad \text{d'où } |x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Donc si $m \geq n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^{n-2}} \leq \frac{1}{2^{n_0-2}} \end{aligned}$$

Par suite pour $\varepsilon > 0$ donné, n_0 est tel que $\dfrac{1}{2^{n_0}} < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Pour $m \geq n \geq n_0$ on a $|x_m - x_n| < \varepsilon$. La suite (x_n) est donc une suite de Cauchy. D'après le théorème 2.4.3, (x_n) converge vers $x_0 \in \mathbb{R}$. De la relation de récurrence, il résulte que $x_0 = \frac{1}{2}(x_0 + x_0)$, ce qui ne donne aucune information sur x_0.

Pour calculer x_0, on peut considérer la suite d'ordre impaire extraite de (x_n).

$$x_1 = 1, x_3 = 1 + \frac{1}{2}, \cdots x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

d'où

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{4^n}}{1 - \dfrac{1}{4}} = 1 + \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{4^n}). \end{aligned}$$

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \frac{4}{3}$. D'après 2.4.2.3, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{4}{3}$.

2.5. À RETENIR

— Soit $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $(S \sim x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in S,\ |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon.$

On notera $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0} f = l$.
l est unique et il existe un voisinage $V_\alpha(x_0)$ de x_0 tel que f est borné dans $V_\alpha(x_0) \cap S$.
Si $l \neq 0$, il existe $V_\alpha(x_0)$ tel que f ne s'annule pas sur $V_\alpha(x_0) \cap S$ et garde le même signe que l sur cet ensemble.
Sous réserve que les opérations soient définies, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x_0}(f+g) &= \lim_{x_0} f + \lim_{x_0} g\\
\lim_{x_0}(fg) &= (\lim_{x_0} f)(\lim_{x_0} f)\\
\lim_{x_0}(\lambda f) &= \lambda(\lim_{x_0} f)\\
\lim_{x_0}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\lim\limits_{x_0} f}{\lim\limits_{x_0} g}
\end{aligned}$$

— Une suite monotone converge si et seulement si elle est bornée.
— Une suite de nombres réels est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.

2.6. Exercices

1) Trouver les limites des fonctions suivantes en justifiant dans chaque cas les calculs

1.1) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x^2+2a+a^2}, \cdots a \neq 0.$

1.2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$.

1.3) $\lim\limits_{h\to 0} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

2) En utilisant $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, trouver les limites des fonctions suivantes :

2.1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$ 2.2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{x}$

2.3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin x}$ 2.4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{x^2}$.

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

4) Soit g une fonction bornée sur $S \subset \mathbb{R}$ et $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

Montrer que : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+nx}$ existe, et trouver la limite.

6) (i) Soit $b > 1$, en écrivant $b = 1 + c$, $c > 0$, montrer que pour tout nombre réel B positif, il existe un entier n_0, tel que si $n \geq n_0$, $b^n > B$.

(ii) Soit $0 < x < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$.

(iii) Étudier le cas (ii) quand $-1 < x < 0$.

7) Pour quelles valeurs de x la limite suivante existe-t-elle :

$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$? Donner dans ce cas les valeurs de $f(x)$.

8) Pour $x \neq -1$, montrer que $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1}$ existe.

Calculer : $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(2)$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$?

9) Étudier les suites suivantes, et trouver les limites quand la suite converge.

1) $x_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$ 2) $x_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n}$

3) $x_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}$ 4) $x_n = \dfrac{n}{2^n}$

5) $x_1 = \sqrt{2}$ et pour $n > 1$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$

10) Soient (U_n) une suite croissante et (V_n) une suite décroissante telles que $\lim(V_n - U_n) = 0$. On dira alors que les deux suites sont adjacentes.

i) Montrer que la suite $W_n = V_n - U_n$ est décroissante et en déduire que $V_n - U_n \geq 0$ pour tout n.

ii) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et ont même limite.

Application — Montrer que la suite $U_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ est convergente (on considérera la suite $V_n = U_n + \frac{1}{n!}$).

2.7. Continuité en un point

2.7.1. Définition

Soit $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$,

On dit que f est continue en x_0, si et seulement si:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) \text{ existe.}$$

2.7.2. Remarque

Si cette limite existe elle ne peut être que $f(x_0)$; d'où :

$$f \text{ continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} f(x) = f(x_0).$$

Il résulte des propriétés fondamentales sur les limites établies au § 2 les propositions suivantes :

2.7.3. Proposition

Soit S un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $x_0 \in S$ et $f, g : S \to \mathbb{R}$ continues en x_0, alors $f + g$, λf, fg, $\frac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$, sont continues en x_0.

2.7.4. Proposition

Soit $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$, et $g : T \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(S) \subseteq T$; si f est continue en x_0 et g est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

2.7.5. Proposition

Soit $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$. f est continue en x_0 si, et seulement si, pour toute suite (x_n) convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$.

2.7.6. Exemples

— *$f(x) = x$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$,*

— *$f(x) = \frac{1}{x}$ est continue pour tout $x \neq 0$,*

— $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$. — *Toute fraction rationnelle* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *est continue en tout point* x_0 *de* $\mathbb{R}$, *tel que* $Q(x_0) \neq 0$.

2.8. Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Lorsque le sous-ensemble S de $\mathbb{R}$ est un intervalle, on peut établir d'importantes propriétés des fonctions continues.

2.8.1. Théorème

Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$: si f est continue en tout point de I, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

En bref, l'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle. Ce résultat porte aussi le nom de *théorème des valeurs intermédiaires*.

Démonstration — D'après la proposition 2.1.10, $f(I)$ est un intervalle si et seulement si :

$$\forall y_1, y_2 \in f(I), \; y_1 < y_2 \Rightarrow [y_1, y_2] \subset f(I).$$

Soit γ tel que $y_1 < \gamma < y_2$. Comme $y_1, y_2 \in f(I)$, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

Supposons $x_1 < x_2$ (on fera un raisonnement analogue si $x_1 > x_2$).

Soit $\mathscr{C} = (x \in [x_1, x_2], f(x) \leq \gamma)$: $\mathscr{C} \neq \emptyset$ car $x_1 \in \mathscr{C}$. $\mathscr{C}$ est majoré par x_2, donc il admet une borne supérieure c et $c \in [x_1, x_2]$, donc f est continue en c.

c borne supérieure de $\mathscr{C}$ entraîne que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \exists x_n \in \mathscr{C} \text{ tel que } x_n > c - \frac{1}{n}$$

la suite (x_n) converge vers c, car $|x_n - c| = c - x_n < \dfrac{1}{n}$.

De $f(x_n) \leq \gamma$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(c)$ (f continue en c) on conclut : $f(c) \leq \gamma$ et par suite $c \neq x_2$.

Comme c est la borne supérieure de $\mathscr{C}$, pour tout $x \in]c, x_2]$,

$f(x) > \gamma \Rightarrow \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c) \geq \gamma$ (f continue en c). D'où $f(c) = \gamma$.

2.8.2. Corollaire

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$; si $f(a)f(b) < 0$, il existe au moins un point $x \in]a,b[$, $f(c) = 0$.

Lorsque l'intervalle I est fermé et borné c'est-à-dire de la forme $I = [a,b]$, $a \leq b$ on a en outre le théorème suivant :

2.8.3. Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Si f est continue en tout point de $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Démonstration — Montrons d'abord que f est bornée sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$.

Si ce n'était pas le cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existerait $x_n \in [a,b]$ tel que $|f(x_n)| > n$.

De la suite bornée (x_n), on peut extraire une suite (x_{n_k}) convergente vers $L \in [a,b]$. Comme f est continue en L et $(x_{n_k}) \to L$, alors

$f(x_{n_k}) \to f(L)$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists k_0$, tel que

$$k \geq k_0, \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(L)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Mais de $|f(x_n)| > n$, pour tout n, on tire

$$|f(x_{n_k}) - f(L)| \geq ||f(x_{n_k})| - |f(L)|| \geq |n_k - C| \text{ où } C = |f(L)| \qquad (2)$$

Donc pour $k \geq k_0$, $|n_k - C| < \varepsilon$, c'est-à-dire $n_k \leq C + \varepsilon$ pour $k \geq k_0$, ce qui est absurde puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} n_k = +\infty$. Donc f est bornée sur $[a,b]$.

Soit $\alpha = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $z_n \in [a,b]$, $f(z_n) > \alpha - \frac{1}{n}$ et $f(z_n) \leq \alpha$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |f(z_n) - \alpha| < \frac{1}{n} \qquad (3)$$

la suite (z_n) étant bornée, il existe une suite extraite (z_{n_k}) qui converge vers $l \in [a,b]$.

Comme f est continue en l et $z_{n_k} \to l$, alors $f(z_{n_k}) \to f(l)$. D'après (3), la suite $f(z_n)$ converge vers α.

Comme $f(z_{n_k})$ est une suite extraite de la suite $f(z_n)$, $f(z_{n_k})$ converge aussi vers α.

De l'unicité de la limite, il résulte que $\alpha = f(l)$.

Pour démontrer que f atteint sa borne inférieure, on peut appliquer le raisonnement précédent à la fonction $(-f)$.

2.8.4. Remarque

Les propriétés énoncées dans les théorèmes 2.8.1 et 2.8.3 peuvent être vérifiées par une fonction sur un intervalle, sans que celle-ci soit continue sur cet intervalle, comme le montre l'exemple suivant :

$f : [0,2] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

f *est bornée sur* $[0,2]$*, atteint sa borne supérieure 1 et sa borne inférieure 0, ainsi que tout nombre compris entre 0 et 1, sans être continue sur* $[0,2]$ *(*f *n'est pas continue en 1).*

2.9. Continuité uniforme Convergence uniforme

2.9.1. Continuité uniforme

2.9.1.1. Définition

Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On appelle *oscillation de f* sur $[a,b]$ et on note $\omega(f,[a,b])$ la différence $M(f) - m(f)$, où $M(f)$ et $m(f)$ sont respectivement les valeurs du maximum et du minimum de f sur $[a,b]$.

$\omega(f,[a,b])$ mesure donc la longueur de l'intervalle $f([a,b])$.

2.9.1.2. Remarque

Si $[c,d] \subset [a,b]$, alors $\omega(f,[c,d]) \leq \omega(f,[a,b])$.

Ce qui est remarquable pour une fonction continue sur $[a,b]$, c'est qu'on peut trouver un découpage de $[a,b]$ en un nombre fini de sous intervalles $[c_i,d_i]$ tel que $\omega(f,[c_i,d_i])$ soit arbitrairement petite pour tout i. Ce résultat qu'on établira ci-dessous sera employé par la suite pour montrer qu'une application continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

2.9.1.3. Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un découpage de $[a,b]$ en nombre fini de sous-intervalles tel que l'oscillation de f sur chacun des sous-intervalles est plus petite que ε.

Preuve — Si la propriété du théorème 2.9.1.3 n'a pas lieu, il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dans le découpage de $[a,b]$ en sous-intervalles de longueur $\frac{1}{2n}$, il existe au moins un sous-intervalle $[x_n, y_n]$ tel que $\omega(f,[x_n,y_n]) > \varepsilon_0$.

Donc $\exists \varepsilon_0 > 0$, et deux suites (x_n) et (y_n) de $[a,b]$, tel que si $n \in \mathbb{N}^*$

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0. \qquad (1)$$

La suite (x_n) étant dans $[a,b]$, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (2.3.4.4) il existe une suite extraite (x_{n_k}) de (x_n) qui converge vers $l \in [a,b]$.

D'après (1) la sous-suite (y_{n_k}) converge aussi vers l. Comme f est continue au point l, les suites $(f(x_{n_k}))$ et $(f(y_{n_k}))$ convergent vers $f(l)$ et donc pour k assez grand

$$|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| < \varepsilon_0.$$

Ce qui contredit la seconde inégalité de (1).

Le théorème 2.9.1.3 peut aussi s'énoncer de la façon suivante :

2.9.1.4. Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, ne dépendant que de ε, tel que pour tous x et x' de $[a,b]$ vérifiant $|x - x'| \leq \delta$, on ait :

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

D'où la définition suivante :

2.9.1.5. Définition

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$. On dira que f est uniformément continue sur I si et seulement si :

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0,$ tel que $\forall x, x' \in I, |x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$

2.9.1.6. Remarques

1) Les théorèmes 2.9.1.3 ou 2.9.1.4 expriment que toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$.

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$. Pour montrer que f n'est pas uniformément continue sur I, il suffit de montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$, et deux suites (x_n) et (y_n) de I tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0.$$

2) Exemples

a) $f(x) = 2x$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

En effet $|f(x) - f(y)| = 2|x - y|$. Pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

En effet, soit $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ et (x_n) et (y_n) les suites de $]0, +\infty[$ définies par :

$$x_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

on a :

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| = 1 > \frac{1}{2}$$

Donc d'après 2.9.1.6, 1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

On pourra montrer à titre d'exercices que pour tout nombre $a > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est uniformément continue sur $[a, +\infty[$.

2.9.2. Suites de fonctions. Convergence uniforme

2.9.2.1. Définition

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dira que la suite (f_n) converge sur D, vers une fonction f, si pour chaque $x \in D$, la suite de nombre réels $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. La fonction f s'appelle la limite sur D de la suite (f_n) et on note

$$f = \lim_{n \to +\infty} (f_n) \quad \text{sur } D$$

ou

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f \quad \text{sur } D.$$

2.9.2.2. Exemples

1) La suite (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle $x \to f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit $D = [0, 1]$; la suite (f_n) définie sur D par $f_n(x) = x^n$, converge sur D vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

3) $D = \mathbb{R}$, la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$, converge sur D vers la fonction $f : x \to x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) $D = \mathbb{R}$ la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx + n)}{n}$ converge sur D vers la fonction nulle.

La définition 2.9.2.1 est équivalente à la définition suivante :

2.9.2.3. Définition

Une suite (f_n) de fonctions sur $D \subset \mathbb{R}$, converge vers une fonction f sur D, si et seulement si :

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $x \in D$, il existe un entier naturel $n_0(\varepsilon, x)$ dépendant de x et de ε tel que pour tout entier $n \geq n_0(\varepsilon, x)$ on a :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

on dit alors que (f_n) converge *simplement* sur D vers f.

2.9.2.4. Remarques

1) L'entier n_0 intervenant dans la définition 2.9.2.3 dépend en général de ε et de x.

Ainsi en appliquant la définition 2.9.2.3 à la convergence des suites de 2.9.2.2, on verra que n_0 dépend effectivement de x et de ε pour les exemples 1), 2) et 3) alors que dans l'exemple 4), l'entier n_0 peut être choisi de manière à ne dépendre que de ε.

2) Si $f_n \to f$ sur $D \subset \mathbb{R}$ et si pour tout n, f_n est continue sur D, la limite f n'est pas nécessairement continue sur D, comme le montre l'exemple 2.9.2.2.2).

Une condition suffisante pour que la limite f d'une suite (f_n) de fonctions continues sur $D \subset \mathbb{R}$, soit continue sur D est que, pour tout $\varepsilon > 0$, le graphe de f_k sur D, pour k assez grand, soit compris entre les graphes de $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$.

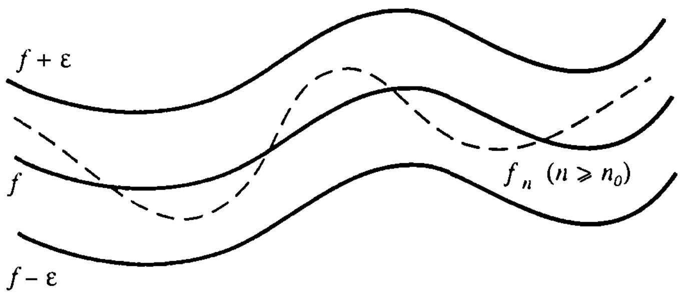

FIGURE: 2.2

Cette propriété est précisée par la définition suivante :

2.9.2.5. Définition

Une suite (f_n) de fonctions sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, converge uniformément sur D, vers une fonction f si et seulement si :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel $n_0(\varepsilon)$ (dépendant uniquement de ε), tel que tout entier $n \geq n_0$ et tout $x \in D$ on a :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2.9.2.6. Remarques

Si (f_n) converge uniformément sur D vers f, alors (f_n) converge simplement sur D vers f. La réciproque n'est pas vraie en général comme on le voit sur les exemples 2.9.2.2,1), 2.9.2.2,2) et 2.9.2.2,3), en utilisant la proposition suivante :

2.9.2.7. Proposition

Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant simplement vers f sur D. (f_n) ne converge pas uniformément sur D vers f, si et seulement si : il existe $\varepsilon_0 > 0$, une suite extraite (f_{n_k}) de (f_n), et une suite (x_k) de D telles que :

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Preuve — D'après la définition 2.9.2.5, (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur D, si et seulement si : il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que pour tout entier n_0, il existe un entier $n \geq n_0$ et $x_{n_0} \in D$ tels que :

$$|f_n(x_{n_0}) - f(x_{n_0})| \geq \varepsilon_0.$$

Ainsi pour $n = 1$, il existe $n_1 \geq 1$ et $x_1 \in D$ tel que

$|f_{n_1}(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0$.

Pour $n = \sup(2, 2n_1)$, il existe $n_2 \geq n$ et $x_2 \in D$ tel que

$|f_{n_2}(x_2) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0$.

On construit ainsi une suite (f_{n_k}) extraite de (f_n) et une suite (x_k) de D telles que :

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0.$$

Réciproquement il est clair que si la condition $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est vérifiée, la convergence n'est pas uniforme.

2.9.2.8. Exemples

1) Pour l'exemple 2.9.2.2, 1) si on prend $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $n_k = k$ *et* $x_k = k$, *alors* $f_k(x_k) = 1$ *et* $|f_k(x_k) - f(x_k)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$.

Donc la suite (f_n) *de l'exemple 2) ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}$, *vers la fonction* f, $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2) Pour l'exemple 2.9.2.2,2), si on prend $\varepsilon_0 = \frac{1}{r3}$, $n_k = k$ *et* $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/k}$, *alors*

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = |f_k(x_k)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

donc la convergence n'est pas uniforme.

3) Pour l'exemple 2.9.2.2,3) si on prend $\varepsilon_0 = 1$, $n_k = k$, $k \geq 1$ *et* $x_k = k$ *alors*

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = k \geq 1.$$

par suite la convergence n'est pas uniforme.

4) Par contre pour l'exemple 2.9.2.2,4) on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, si on choisit n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, alors pour $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et dans ce cas la convergence est uniforme.

Le théorème qui suit exprime que la convergence uniforme d'une suite de fonctions continues suffit à assurer la continuité de la fonction limite.

Autrement dit, si (f_n) converge uniformément sur $D \subset \mathbb{R}$ vers f, et si les fonctions f_n sont continues sur D, alors f est continue sur D c'est-à-dire pour tout $x \in D$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))$$

On verra un phénomène analogue quand on étudiera la convergence des suites de fonctions dérivables.

2.9.2.9. Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $D \subset \mathbb{R}$, qui converge uniformément sur D vers f, alors la fonction f est continue sur D.

Preuve — Supposons que (f_n) converge uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \forall x \in D$.

Soit $x_0 \in D$. Comme f_{n_0} est continue en x_0, $\exists \alpha > 0 : |x - x| < \alpha \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Soit maintenant $x \in D$ tel que $|x - x_0| < \alpha$; on a alors

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

f est donc continue en x_0. x_0 étant un point arbitraire de D, il en résulte que f est continue sur D.

2.9.2.10. Remarque

La convergence uniforme d'une suite de fonctions continues est une condition suffisante, mais non nécessaire, pour assurer la continuité de la fonction limite. Ainsi dans les exemples 2.9.2.2.1 et 2.9.2.2.3 les suites de fonctions continues ne convergent pas uniformément, alors que leurs limites sont continues.

2.10. À RETENIR

Soit $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

— Si S est un intervalle, et f est continue en tout point de S, alors $f(S)$ est un intervalle.

— Si $S = [a, b]$, $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et f est continue en tout point de $[a, b]$ alors :

i) $f([a, b])$ est bornée,

ii) f atteint sa borne supérieure M et sa borne inférieure m,

iii) pour tout $y \in [m, M]$, l'équation en x

$$f(x) = y$$

admet au moins une solution dans $[a, b]$.

iv) f est uniformément continue sur $[a, b]$.

— La limite uniforme d'une suite de fonctions continues, est continue.

2.11. Exercices et problèmes

1) Les suites suivantes sont-elles convergentes :

a) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2} n, \ \forall n \geq 0$.

b) $x_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ où P est un polynôme de degré p et Q un polynôme de degré q, x_n est défini pour n assez grand.

c) $u_n = \operatorname{tg}\left((1+n)\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2) Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels telles que la suite $(U_n V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont elles convergentes ?

3) Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels. On suppose que U_n est bornée et que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$. La suite $(U_n V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet-elle une limite quand n tend vers $+\infty$.

4) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positif. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = L > 0$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < L$.

Montrer qu'il existe $a > 0$, $b > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que :

$$n \geq k \Rightarrow A(L-\varepsilon)^n \leq x_n \leq B(L+\varepsilon)^n$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.

5) Soient a_1 et b_1 deux nombres réels tels que $0 < a_1 < b_1$. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

a) Montrer par récurrence que $\forall n,\ a_n < b_n$.

b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite.

6) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels définies par : $u_1 = -2$, $u_n = \dfrac{2u_{n-1}}{u_{n-1}+3}$ pour $n \geq 2$.

a) Montrer que $u_n \geq -2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que les u_n sont alternativement négatifs et positifs.

c) Établir que chacune des suites partielles (u_{2p}) et (u_{2p+1}) est monotone et montrer que ces suites partielles convergent.

d) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente?

7) a) Soient deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et tend vers $+\infty$.

Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$ existe, il en est de même pour l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ et de plus on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} \quad \text{(théorème de Stolz).}$$

b) Appliquer ce résultat à l'étude de la suite $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ si la suite a_n admet une limite.

8) $E(x)$ désignant la partie entière de x, soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (-1)^{E(x)}(x - E(x))^2. \end{aligned}$$

a) Montrer que f est périodique de période égale à 2.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

c) Montrer que f est discontinue en tout point $k \in \mathbb{Z}$.

d) Faire la représentation graphique de f.

9) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

h est-elle continue?

10) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f est continue au point $x_0 = \frac{1}{2}$ et est discontinue en tout autre point x distinct de $\frac{1}{2}$.

11) La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est-elle continue?

12) Une application $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\forall x, y \in I, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Montrer qu'une application lipschitzienne est uniformément continue.

13) Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Q}$. $E(u)$ désignant la partie entière de u, on considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to x - aE\left(\frac{1}{a}\right)$$

a) Déterminer les points de discontinuité de f.

b) Soit $\bar{f}$ la restriction de f à $\mathbb{Q}$. Faire une représentation graphique de $\bar{f}$. Montrer que $\bar{f}$ est injective.

c) On note $J = \bar{f}(\mathbb{Q})$. L'application $\overline{f^{-1}} : J \to \mathbb{Q}$ est-elle continue?

14) Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$, $0 \leq k < 1$, tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Soit $c \in [a, b]$. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = c, \ x_{n+1} = f(x_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$.

b) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite Cauchy.

c) En déduire qu'il existe un unique point $x \in [a, b]$ qui vérifie l'égalité $f(x) = x$.

15) Soit $P(x)$ un polynôme de degré n,

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0.$$

tel que $a_0 a_n < 0$.

Montrer qu'il existe au moins $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_0) = 0$.

16) Soit $f(x) = \operatorname{tg} x$, on a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ alors qu'il n'existe pas de $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ tel que $f(x) = 0$. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème des valeurs intermédiaires.

17) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

a) Montrer que f est bornée.

b) Si de plus $l < f(0)$, démontrer l'existence d'un point de $c \in [0, +\infty[$ où f atteint son maximum.

18) Soient $a > 0$ et $c > 1$, tels que $0 < a < c$. En considérant la fonction $f(x) = x^n$, $n > 0$, montrer qu'il existe $b \in]0, 1[$ tel que $f(b) = a$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $a \in \mathbb{R}_+^*$ il existe un unique réel $b > 0$, tel que $b^n = a$. Si n est impair et $a < 0$, montrer qu'il existe un unique réel $b < 0$ tel que $b^n = a$.

19) On dit qu'une racine réelle d'un polynôme $f(x)$ a été isolée, si on trouve un intervalle $[a, b]$ ne contenant que cette racine et pas d'autres.

En vous aidant du théorème des valeurs intermédiaires, isoler les racines réelles des polynômes suivants, chacun ayant exactement quatre racines.

(i) $3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8 = 0$

(ii) $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$.

20) i) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continue sur $[0, 1]$ telle que $0 \leq f(x) \leq 1$, pour tout $x \in [0, 1]$.

Montrer qu'il existe au moins un point c, tel que $f(c) = c$ (appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g(x) = f(x) - x$).

ii) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \leq a$ et $f(b) \geq b$. Montrer qu'il existe un point $x_0 \in [a, b]$, tel que $f(x_0) = x_0$.

21) Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $[-1, 1]$, qui vérifient la relation :

$$x^2 + f(x)^2 = 1, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

a) Trouver deux fonctions f_0 et f_1 appartenant à $\mathfrak{F}$ et qui sont continues sur $[-1, 1]$.

b) Trouver une fonction $g \in \mathfrak{F}$ qui soit non continue.

c) Montrer que toute fonction $f \in \mathfrak{F}$ est continue aux points $+1$ et -1.

d) Soit $h \in \mathfrak{F}$ une fonction continue sur $[-1, 1]$. Montrer que $h(0) > 0$ implique $h(x) > 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

e) En déduire que les seuls éléments de $\mathfrak{F}$ qui sont continus sur $[-1, 1]$, sont les deux fonctions trouvées à la question a).

22) Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dira que f est convexe sur $[a, b]$ si et seulement si

$$\forall x,\ x' \in [a, b],\ \forall t \in [0, 1] \text{ on a :}$$

$f(tx + (1-t)x') \leq tf(x) + (1-t)f(x')$. Pour $x_0 \in]a, b[$, on considère la fonction : $\varphi_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

i) Montrer que φ_{x_0} est croissante sur $I - \{x_0\}$.

ii) En déduire que $\lim\limits_{x \to x_0^+} \varphi_{x_0}(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} \varphi_{x_0}(x)$ existent, et

$$\lim_{x \to x_0^-} \varphi_{x_0}(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} \varphi_{x_0}(x)$$

iii) En déduire que f est continue en tout point de $]a, b[$.

23) On considère les suites (f_n) définies sur $D = (x \in \mathbb{R} : x > 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par les formules suivantes :

$$\text{a) } \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{b) } \frac{x^n}{n+x^n} \quad \text{c) } \frac{x^n}{1+x^2 n} \quad \text{d) } \frac{x}{n} e^{-\frac{x}{n}}.$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de ces suites.

24) Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions continues sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq \cdots \text{ pour tout } x \in D.$$

i) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(c) = 0$, pour $c \in D$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et un voisinage U de c, tels que si $n \geq m$ et $x \in U \cap D$, alors $f_n(x) < \varepsilon$.

ii) En déduire la propriété suivante due à Ulisse Dini. Si une suite monotone de fonctions continues converge en chaque point d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ vers une fonction f continue, alors la convergence est uniforme sur $[a, b]$.

25) Démontrer le résultat suivant dû à Georges Pólya. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle $I[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction décroissante sur I.

— la suite (f_n) converge ponctuellement sur I vers une fonction $f(x)$ continue sur I.

Montrer que la convergence est alors uniforme sur I (on ne suppose pas que les f_n sont continues).

Problème

26) Approximation uniforme d'une fonction continue par une suite de polynômes

Soient m, n deux entiers tels que $0 \leq m \leq n$. On pose :

$$I_{n,m}(x) = \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}, \qquad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n+m)!}$$

1) Montrer que les polynômes $I_{n,m}(x)$ vérifient les propriétés suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} I_{n,m}(x) = 1.$

(2) $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} mI_{n,m}(x) = nx.$

(3) $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} (nx-m)^2 I_{n,m}(x) = nx(1-x).$

Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, le polynôme de Bernstein de degré $\leq n$ associé à f est :

$$B_n(x) = B_n(f, x) = \sum_{m=0}^{n} I_{n,m}(x) f(\frac{m}{n})$$

L'objet de ce problème est de démontrer que si f est continue sur $[0,1]$ la suite des polynômes $B_n(x)$ converge uniformément sur I vers f. On suppose donc que f est continue sur $[0,1]$.

2) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tel que :

$|x_1 - x_2| < \delta$, implique $|f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tous x_1, x_2 de $[0,1]$.

3) Pour n fixé, on considère :

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} [f(x) - f(\frac{m}{n})] I_{n,m}(x) \qquad (1)$$

on décompose la somme Σ du deuxième membre de (4) en deux sommes Σ_1 et Σ_2 définies ainsi

pour Σ_1, m prend tous les entiers m, $m \leq n$ tels que $\left|x - \dfrac{m}{n}\right| < \delta$,

pour Σ_2, m prend tous les entiers m, $m \leq n$ tels que $\left|x - \dfrac{m}{n}\right| \geq \delta$.

3.1) En utilisant 2) montrer que $|\Sigma_1| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

3.2) On pose $M = \displaystyle\sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Montrer que :

$$|\Sigma_2| \leq 2M\Sigma_2 I_{n,m}(x) = 2M\Sigma_2 \frac{(nx-m)^2 I_{n,m}x}{(nx-m)^2}$$
$$\leq 2M\Sigma_2 \frac{(nx-m)^2}{n^2\delta^2} I_{n,m}x.$$

En déduire, en utilisant la relation (3) de 1) que :

$$|\Sigma_2| \leq \frac{M}{2n\delta^2}$$

3.3) En utilisant 3.1 et 3.2 montrer que $|f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon$ si $n \geq \frac{M}{2n\delta^2}$ pour tout $x \in [0,1]$.

3.4) En déduire le *théorème d'approximation de Weierstrass*: toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, est limite uniforme d'une suite de polynômes.

27) Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur une intervalle I. On dira que (f_n) est uniformément de Cauchy sur I, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que},\ \forall n, m \geq n_0,\ \forall x \in I,\ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Montrer que f_n converge uniformément si et seulement si elle est uniformément de Cauchy.

28) 1) Soit $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie la relation

$$h(xy) = h(x) + h(y), \qquad \forall x, y. \qquad (*)$$

Montrer que h est identiquement nulle.

2) Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle qui vérifie la relation (*) de 1).

a) Montrer que h est continue sur $]0, +\infty[$ si et seulement si elle est continue au point $x = 1$.

b) Montrer que $h(1) = 0$ et que si $x > 0$, et $r \in \mathbb{Q}$, alors $h(x^r) = rh(x)$.

Indication — On montrera le résultat d'abord si $r \in \mathbb{Z}$, puis l'on établira le résultat si

$$r = \frac{1}{q} \in \mathbb{Q},\ \text{en remarquant que } x = (x^{\frac{1}{q}})^q.$$

c) Montrer que s'il existe un intervalle ouvert non vide I tel que $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors h est strictement croissante et continue.

d) Montrer que si h est continue alors on a : $h(x) > 0$ si $x > 1$, et $h(x) < 0$ si $x < 1$.

c) Soit $b > 1$. Montre qu'il existe au plus une fonction continue h sur $]0, +\infty[$ vérifiant (*) et telle que $h(b) = 1$.

29) Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, c un point de $[a, b]$. Soient

$$\begin{aligned} f_1 : [a, c] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \alpha_1 x + \beta_1 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} f_2 : [c, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \alpha_2 x + \beta_2 \end{aligned}$$

deux applications affines telles que $f_1(c) = f_2(c)$.

Soit l'application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \leq c \\ f_2(x) & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$

a) Soit $u \in [a, c]$, $v \in [c, b]$. Montrer que

$$|f(u) - f(v)| \leq \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|)\,|u - v|$$

et en déduire que f est lipschitzienne (voir exercice 12).

b) On dit qu'une application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est affine par morceaux s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ telle que la restriction f_i de f à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ soit une application affine. Montrer que si f est une application affine par morceaux, alors elle est lipschitzienne.

c) Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue.

En utilisant le fait que f est uniformément continue, prouver que : $\forall n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction affine par morceaux φ_n telle que :

$$|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{n}, \ \forall x \in [a, b].$$

Problème

30) Fonction à variation bornée

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. Pour toute subdivision $P = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ de $[a, b]$, on pose $V_f(P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$. On dira que la fonction est à variation bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute subdivision P de $[a, b]$, on ait : $V_f(P) \leq M$.

On note $V_b([a, b])$ l'ensemble des fonctions à variation bornée sur $[a, b]$. On pose $V_f = \sup\{V_f(P),\ P \sup \text{ de } [a, b]\}$.

1) Montrer que $V_f = 0 \Leftrightarrow f = \text{constante}$.

2) Soit $P = (a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ et $Q = (y_0 = a < \cdots < y_m = b)$ tel que $\{x_0, x_1, \cdots x_n\} \subset \{x_0 \cdots, y_n\}$. Montrer que $V_P f \leq V_Q f$.

3) Si $f \in V_b([a,b])$, montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivision de $[a,b]$ telle que $V(f) = \lim\limits_{n} V_{P_n}(f)$.

4) Montrer que si f est croissante, alors $f \in V_b([a,b])$ et $V(f) = f(b) - f(a)$. En est-il ainsi si f est décroissante?

5) Montrer que si f est lipschitzienne de rapport m, alors

$$f \in V_b([a,b]) \text{ et } V_f \leq fm(b-a).$$

6) Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

n'est pas à variation bornée sur $[0,1]$. Montrer que la fonction $g : x \to xf(x)$ est continue mais n'est pas à variation bornée.

7) Montrer que si $f \in V_b([a,b])$ alors $|f(x)| \leq f(a) + V(f)\ \forall x \in [a,b]$.

8) Montrer que si $f \in V_b([a,b])$ et $g \in V_b([a,b])$, alors $fg \in V_b([a,b])$. En est-il de même pour le quotient $\frac{f}{g}$.

9) a) Soit $f \in V_b([a,b])$. On considère sur $[a,b]$ la fonction $\tilde{f}$ définie par $\bar{f}_1(x) = V_f[a,x]$, $\tilde{f}(a) = 0$. Montrer $\bar{f}_1$ est croissante.

b) soit $f_2 : x \to f_2(x) = f_1(x) - f(x)$, montrer que f est croissante.

c) Déduire de a) et b) le résultat suivant :

Théorème — Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application : f est à variation bornée si et seulement si f est la différence de deux fonctions croissantes.

Chapitre 3 : DIFFÉRENTIATION

Introduction

Le concept central du calcul différentiel est la notion de dérivée, qui trouve son origine dans un problème de géométrie : déterminer la tangente en un point d'une courbe.

Le problème s'est imposé à Fermat, mathématicien français, qui cherchait à déterminer les maximums et les minimums de certaines fonctions. Il s'est alors aperçu qu'en ces points, les fonctions ont des tangentes horizontales. D'où la recherche de telles tangentes, et d'une manière générale la recherche d'une tangente en un point quelconque d'une courbe. Ce problème fut résolu au XVII^{e} siècle par Newton et Leibniz en introduisant la notion de « pente » en un point d'une courbe, qui, dans le cas où la courbe est donnée par une équation $y = f(x)$, définit la dérivée de f en ce point. La notion de dérivée permet d'améliorer le problème d'approximation abordé dans le chapitre 2, en approchant une fonction f par une fonction affine au voisinage de x_0, $x \to ax + b$ telle que $ax_0 + b = f(x_0)$; c'est-à-dire une fonction affine de la forme $x \to a(x - x_0) + f(x_0)$; le meilleur choix s'obtient en prenant, a égal à la dérivée de f en x_0. On abordera la définition de la dérivée, à partir de la notion de tangente : ce qui est plus parlant et plus conforme au point de vue historique.

Le concept de dérivée est peut être le plus fabuleux des mathématiques ; ses applications se trouvent tout autour de nous dans notre vie quotidienne : vitesse d'un avion ou d'une voiture ; partout où il y a mouvement sans choc. Il permet de transformer certains problèmes en ce qu'il y a de plus simple : les fonctions linéaires, les problèmes linéaires, ceux que l'on sait résoudre.

3.1. Tangente en un point d'une courbe plane

Soit $\mathscr{P}$ le plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $m_0 = (x_0, y_0) \in \mathscr{P}$.

On dira qu'un point $m = (x, y)$ de $\mathscr{P}$ approche m_0 à ε près si la longueur du vecteur $\overrightarrow{m_0m}$, notée $||\overrightarrow{m_0m}||$ est inférieure à ε, soit :

$$||\overrightarrow{m_0m}|| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon.$$

Si S est un sous-ensemble de $\mathscr{P}$. On dira que S est *arbitrairement voisin* de m_0 et on notera $S \sim m_0$, si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in S,\quad \text{tel que,}\quad \|\overrightarrow{m_0 m}\| < \varepsilon.$$

3.1.1. Définition

Soit $f : S \subset \mathscr{P} \to \mathbb{R}$, $m_0 \in \mathscr{P}$ et $S \sim m_0$. Le symbole $\lim\limits_{\substack{m \to m_0 \\ m \in S}} f(m) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ signifie :

$$\forall \varepsilon >,\ \exists \alpha > 0,\quad \text{tel que,}\quad \|\overrightarrow{m_0 m}\| < \alpha \Rightarrow |f(m) - \lambda| < \varepsilon.$$

On dira que $f(m)$ tend vers λ quand m tend vers m_0 en restant dans S.

3.1.2. Remarque

De la double inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sup(|a|, |b|) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

valable pour tous a, b de $\mathbb{R}$, on conclut : si $\|\overrightarrow{m_0 m}\| < \alpha$ alors $|x - x_0| < \alpha$ et $|y - y_0| < \alpha$ où $m = (x, y)$ et $m_0 = (x_0, y_0)$.

De même si $|x - x_0| < \alpha$ et $|y - y_0| < \alpha$ alors $\|\overrightarrow{m_0 m}\| < \sqrt{2}\alpha$. Par suite :

$$\lim_{m \to m_0} f(m) = \lambda \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que,}$$
$$(|x - x_0| < \alpha \text{ et } |y - y_0| < \alpha) \Rightarrow |f(m) - \lambda| < \varepsilon.$$

Soit Γ une courbe de $\mathscr{P}$ et $m_0 \in \Gamma$, tel que $\Gamma - \{m_0\} \sim m_0$. Pour tout $m \in \Gamma - \{m_0\}$ on note $P_{m_0}(m)$ la pente de la droite passant par m et m_0 : on définit ainsi une application :

$$P_{m_0} : \Gamma - \{m_0\} \to \mathbb{R}$$
$$m \mapsto P_{m_0}(m)$$

Si $P_{m_0}(m)$ admet une limite quand m tend vers m_0 en restant dans $\Gamma - \{m_0\}$, cette limite notée $P_{m_0}(\Gamma)$, s'appelle **pente de** Γ **en** m_0 *et la droite passant par m_0 et de pente $P_{m_0}(\Gamma)$, s'appelle* **tangente de** Γ **en** m_0.

3.1.3. Remarque

1) Cette définition n'implique nullement que la tangente « touche » Γ seulement en un point.

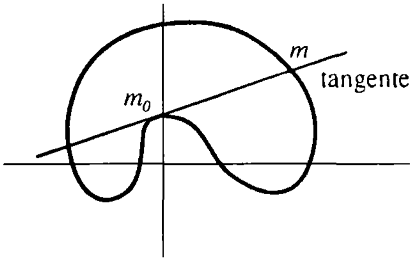

FIGURE: 3.1.3.A

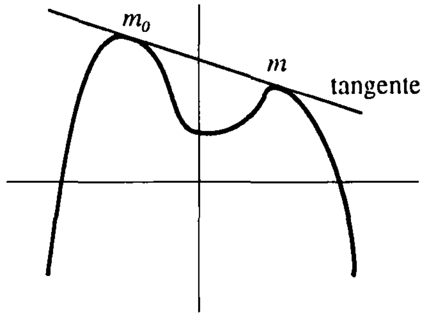

FIGURE: 3.1.3.B

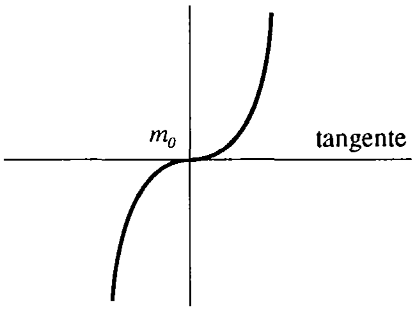

FIGURE: 3.1.3.C

2) Exemple

Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathscr{P},\ y = x^2,\ x \in \mathbb{R}\}$. *Calculons* $P_{m_0}(\Gamma)$ *où* $m_0 = (1, 1)$. *Soit* $m = (1+h, (1+h)^2)$ *un point de* $\Gamma - \{m_0\}$. $P_{m_0}(m) = \dfrac{(1+h)^2 - 1}{h} = h + 2$, $\overrightarrow{m_0 m} = (h, h(h+2))$. *Montrons que* $P_{m_0}(\Gamma) = 2$.

Pour cela d'après 3.1.2. on doit montrer que :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ *tel que* $(|h| < \alpha$ *et* $|h|\ |h+2| < \alpha) \Rightarrow |h+2-2| = |h| < \varepsilon$; *il suffit de prendre* $\alpha = \varepsilon$.

La courbe Γ *admet comme tangente en* m_0 *la droite* Δ *d'équation* $y = 2x - 1$. *On remarquera que l'équation de* Δ *est reliée à la fonction* $f(x) = x^2$ *par la relation :*

$$f(x) - (2x - 1) = \varepsilon(x)(x - 1) \quad \text{où} \lim_{x \to 1} \varepsilon(x) = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\varepsilon(x) = \frac{f(x) - 1}{x - 1} - 2\right)$$

Autrement dit pour x assez voisin de 1, $2x - 1$ est une valeur approchée de $f(x)$. En fait la relation (1) caractérise l'existence d'une tangente en un point d'une courbe définie par une équation $y = f(x)$.

3.1.4. Théorème

Soit Γ la courbe représentative dans $\mathscr{P}$ de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $m_0 = (x_0, f(x_0))$ un point de Γ.

Γ admet une tangente en m_0 si et seulement si, parmi les droites passant par m_0, il en existe une notée Δ, d'équation $y = T(x)$, telle que : $f(x) - T(x) = \varepsilon_{x_0}(x)(x - x_0)$ où ε_{x_0} est une fonction définie dans un voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0) avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_{x_0}(x) = 0$. Δ est unique et constitue la tangente de Γ en m_0. La pente de Δ, notée $f'(x_0)$, s'appelle la dérivée de f en x_0.

Démonstration

$$\Gamma \text{ admet une tangente en } m_0 \iff \lim_{m \to m_0} P_{m_0}(m) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

où $P_{m_0}(m) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ avec $m = (x, f(x)) \neq m_0$. Par suite:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \text{ tel que } (|x - x_0| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(x_0)| < \alpha) \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right| < \varepsilon \iff |f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)| < \varepsilon |x - x_0|$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < (\lambda + \varepsilon)|x - x_0| \qquad (2)$$

(2) entraîne que f est continue en x_0. Par suite pour $\alpha > 0$, $\exists \gamma > 0$, tel que :

$$|x - x_0| < \gamma \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha.$$

Donc si $|x - x_0| < \delta$ avec $\delta = \inf(\alpha, \gamma)$, on a $|x - x_0| < \alpha$ et $|f(x) - f(x_0)| < \alpha$ d'où

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

Par suite :

$$\lim_{m \to m_0} P_{m_0}(m) = \lambda \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$$

ce qui entraîne en particulier que λ est unique. En posant

$$\varepsilon_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda$$

on a :

$$f(x) - \lambda(x - x_0) - f(x_0) = \varepsilon_{x_0}(x)(x - x_0), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon_{x_0}(x) = 0;$$

et la droite Δ d'équation $y = \lambda(x - x_0) + f(x_0)$ est la tangente unique. de Γ en m_0.

Réciproquement. soit une droite D passant par m_0. d'équation $y = \rho(x - x_0) + f(x_0)$ telle que

$$f(x) - f(x_0) - \rho(x - x_0) = \varepsilon_{x_0}(x)(x - x_0),\ \text{où } \lim_{x \to x_0} \varepsilon_{x_0}(x) = 0 \tag{3}$$

D'après (3) f est continue en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \rho. \tag{4}$$

Par un raisonnement analogue à celui fait précédemment on montre que la pente. $P_{m_0}(\Gamma)$. existe en m_0 et

$$\lim_{m \to m_0} P_{m_0}(m) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \rho.$$

Donc Γ admet la droite D comme tangente en m_0. et cette tangente est unique par suite de l'unicité de ρ. d'après (4).

3.2. Dérivée en un point. Différentielle

D'après le théorème 3.1.4. on peut poser naturellement la définition suivante.

3.2.1. Définition

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Γ la courbe représentative de f dans $\mathscr{P}$

On dira que f est dérivable en x_0 si Γ admet une tangente Δ au point m_0 d'abscisse x_0.

Δ étant unique. la pente de Δ s'appelle la dérivée de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

3.2.2. Remarques

1) D'après le théorème 3.1.4. f est dérivable en x_0. de dérivée $f'(x_0)$. si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{i) } \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \\ \text{ii) } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_{x_0}(x)(x - x_0), \\ \qquad \text{avec } \displaystyle\lim_{x \to x_0} \varepsilon_{x_0}(x) = 0 \end{array}}$$

2) si f est continue en x_0 et si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$), on convient de dire que la fonction f admet une dérivée infinie en x_0. Le graphe de f admet alors au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à l'axe Oy.

3.2.3. Différentielle d'une fonction en un point

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en $x_0 \in I$, on peut écrire dans un voisinage de x_0, en posant $x = x_0 + h$.

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \varepsilon(h)h \tag{1}$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

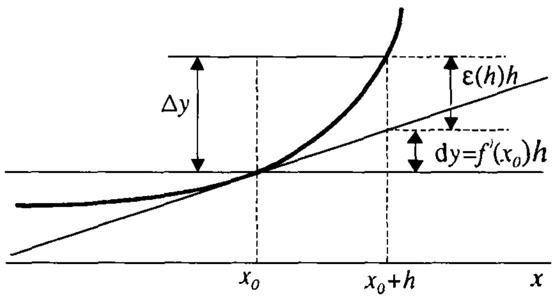

FIGURE: 3.2.3.

La relation (1) signifie que $\Delta y = f(x_0+h)-f(x_0)$. l'accroissement de f de x_0 à x_0+h, est la somme de deux termes : un premier terme $f'(x_0)h$ linéaire par rapport à l'accroissement de la variable x. et un second terme $\varepsilon(h)h$. un infiniment petit d'ordre au moins un par rapport à h.

Géométriquement, le premier terme représente l'accroissement de f mesuré le long de la tangente en m_0, alors que le deuxième terme mesure la différence entre la véritable valeur de f en x_0+h. et cette valeur mesurée le long de la tangente (Fig. 3.2.3).

$f'(x_0)h$ s'appelle la partie linéaire principale de l'accroissement Δy. L'existence de la dérivée de f en x_0 implique la possibilité d'isoler dans Δy cette partie linéaire principale. La partie linéaire principale définit une application linéaire $h \mapsto f'(x_0)h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appelée la différentielle de f en x_0 et notée $\mathrm{d}f(x_0)$.

$$h \mapsto \mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)h.$$

La différentielle de l'application identique $x \mapsto x$ de $\mathbb{R}$, en un point quelconque x_0 de $\mathbb{R}$ est l'application linéaire $h \to h$ qui ne dépend pas du point x_0 considéré. En notant (par abus de notation) $\mathrm{d}\,x$ cette application, on pourra alors écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,f(x_0)(h) &= f'(x_0)\,[\mathrm{d}\,x(h)]\\ &= (f'(x_0)\,\mathrm{d}\,x)\,(h). \quad \forall h \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{d}\,f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}\,x}$$

Ainsi $\forall h \in \mathbb{R}^*$, $f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}\,f(x_0)(h)}{\mathrm{d}\,x(h)} = \dfrac{\mathrm{d}\,f(x_0)}{\mathrm{d}\,x}(h)$, d'où la notation : $f'(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}\,f(x_0)}{\mathrm{d}\,x}$.

Ainsi si f est dérivable en x_0 on pourra écrire :

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathrm{d}\,f(x_0)(h) + \varepsilon_{x_0}(h)h}$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_{x_0}(h) = 0$. D'où la définition suivante :

3.2.3.1. Définition

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. On dira que f est différentiable en x_0 si, et seulement si : il existe une application linéaire $L^f_{x_0}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + L^f_{x_0}(h) + \varepsilon_{x_0}(h)h, \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon_{x_0}(h) = 0}$$

3.2.3.2. Remarques

1) Si $L^f_{x_0}$ existe, elle est unique et s'appelle la différentielle de f en x_0.

2) $L^f_{x_0}(h) = L^f_{x_0}(1) \cdot h$. D'où : f différentiable en $x_0 \iff f$ dérivable en x_0 et $L^f_{x_0}(1) = f'(x_0)$.

3) La définition 3.2.3.1 se généralise facilement à une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (voir Chap. 5).

3.3. Propriétés des fonctions dérivables

3.3.1. Si f est dérivable en x_0, elle est continue en ce point(3.2.2.1).

La réciproque de cette proposition est inexacte. La fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

est continue en 0, mais non dérivable en ce point.

3.3.2. Si f est dérivable en x_0 on a :

$$f(x) - f'(x_0)h - f(x_0) = \varepsilon_{x_0}(h)h$$

avec $h = x - x_0$, et $\lim_{h\to 0} \varepsilon_{x_0}(h) = 0$ C'est-à-dire : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, tel que, $|h| < \delta \Rightarrow |\varepsilon_{x_0}(h)| < \varepsilon$. D'où :

$$-\varepsilon h < f(x) - f'(x_0)h - f(x_0) < \varepsilon h, \quad \text{pour } |h| < \delta. \tag{1}$$

La relation (1) a une signification géométrique : si f est dérivable en x_0, au voisinage de x_0, le graphe de $y = f(x)$ est compris entre deux droites, faisant des angles arbitrairement petits avec la tangente au graphe en x_0 (Fig 3.3.2). Il résulte facilement de la relation (1) qui si $f'(x_0) < 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 < h < \delta$, on a :

$$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h) \tag{2}$$

Alors que si $f'(x_0) > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 < h < \delta$, on a :

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h) \tag{3}$$

3.3.3. Définition

Une fonction $f(x)$ est dite avoir un *maximum local* (resp. un *minimum local*) en un point $x_0 \in I$, s'il existe $\alpha > 0$, tel que $f(x) \le f(x_0)$ (resp. $f(x) \ge f(x_0)$), pour $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I$.

Si f a un maximum local ou un minimum local en x_0, on dira que f a un *extremum local* en x_0. On a la proposition suivante :

3.3.3.1. Proposition

Si $f(x)$ a un extremum local en x_0, et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve — Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f ne peut pas avoir d'extremum local en x_0, d'après les inégalités (2) et (3) de 3.3.2. Toutefois si une fonction f admet une dérivée nulle en x_0, elle n'admet pas nécessairement un extremum local en ce point, comme le montre l'exemple :

$$f(x) = x^3 \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

Pour une fonction f dérivable, les points où elle atteint un extremum, sont à chercher parmi les solutions de l'équation :

$$f'(x) = 0$$

appelées les *points critiques* de f.

Les points critiques jouent un rôle prépondérant dans l'étude des fonctions différentiables.

3.3.4. Dérivée à gauche et dérivée à droite

On dira qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, x_0]$ (resp. $[x_0, b[$) est *dérivable à gauche* (resp. *à droite*) en x_0, si et seulement si

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ existe} \quad \left(\text{resp. } \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ existe}\right).$$

Cette limite, notée $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$), s'appelle la *dérivée à gauche* (resp. la *dérivée à droite*) de f en x_0. Dans ce cas les demi-droites d'équations $y = f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$, et $y = f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$, s'appellent respectivement la *demi-tangente à gauche* et la *demi-tangente à droite* au point $m_0 = (x_0, f(x_0))$. D'après la définition de la limite

$$\begin{array}{l} f \text{ est dérivable en } x_0 \\ \text{de dérivée } f'(x_0) \end{array} \iff \begin{array}{l} f'_g(x_0) \text{ et } f'_d(x_0) \text{ existent} \\ \text{et sont égales} \end{array}$$

Par contre $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ peuvent exister sans que $f'(x_0)$ existe.

Exemples.

Pour $f(x) = |x|$, $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.

Pour $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ x-1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$ $f'_g(1) = 1$, mais $f'_d(1)$ n'existe pas.

3.3.4.1. Dérivées d'ordre supérieur

Si $f'(x)$ existe dans un voisinage ouvert $V_\alpha(x_0)$ de x_0, on aura une fonction notée f' de $V_\alpha(x_0)$ définie dans $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{aligned} f' : V_\alpha(x_0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

Si f' est dérivable en x_0, sa dérivée notée $f''(x_0)$ est appelée la dé rivée seconde de f en x_0. En itérant ce processus, on définira la dérivée d'ordre p de f en x_0 notée $f^{(p)}(x_0)$.

L'existence de $f^{(p)}(x_0)$, suppose celle de $f^{(k)}(x_0)$ dans un voisinage de x_0 pour $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$).

— On dit que f est de classe C sur I si f est continue sur I.

— On dit que f est de classe C^p sur I ($p \geq 1$) si $f^{(p)}$ est définie et continue sur I.

— On dit que f est de classe C^∞ sur I si pour tout $p \in \mathbb{N}$, f est de classe C^p sur I.

3.3.5. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

3.3.5.1.

Il résulte immédiatement de la remarque 3.2.2.1 que si f et g sont dérivables en x_0, et si λ est un réel, alors λf et $f+g$ sont dérivables en x_0 : les dérivées sont respectivement $\lambda f'(x_0)$ et $f'(x_0)+g'(x_0)$.

3.3.5.2.

Si f et g sont dérivables en x_0 alors fg est dérivables en x_0 et l'on a :

$$\boxed{(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)} \tag{1}$$

(1) $\Longleftrightarrow$ fg est différentiable en x_0 et l'on a :

$$\boxed{\mathrm{d}(fg)(x_0) = f(x_0)\,\mathrm{d}g(x_0) + g(x_0)\,\mathrm{d}f(x_0)}$$

Preuve — Les hypothèses entraînent

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \varepsilon_1(h)h, \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0 \\ g(x_0+h) &= g(x_0) + hg'(x_0) + \varepsilon_2(h)h, \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$(fg)(x_0+h) = (fg)(x_0) + \left(f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)\right)h + \varepsilon(h)h$$

où

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) = f(x_0)\varepsilon_2(h) + g(x_0)\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)\varepsilon_1(h) \\ + f'(x_0)g'(x_0)h + hf'(x_0)\varepsilon_2(h) + hg'(x_0)\varepsilon_1(h). \end{aligned}$$

Par suite $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. De 3.3.5.1 et 3.3.5.2 on conclut que l'ensemble des fonctions dérivables en x_0 est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues en x_0.

3.3.5.3.

Si f est dérivable en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, f étant continue en x_0, il existe un voisinage $V_\alpha(x_0) =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, tel que pour tout $x \in V_\alpha(x)$, $f(x) \neq 0$: alors $\dfrac{1}{f}$ est définie sur $V_\alpha(x_0)$, dérivable en x_0, et sa dérivée est :

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}} \tag{1}$$

(1) $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{1}{f}$ est différentiable en x_0 et l'on a :

$$\boxed{\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)(x_0) = -\frac{1}{f(x_0)^2}\,\mathrm{d}f(x_0)} \qquad (1')$$

Preuve

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-1}{f(x)f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0.$$

il résulte des théorèmes sur les limites que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}.$$

3.3.6. Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $y_0 = f(x_0)$. g étant définie dans un voisinage V_{y_0} de y_0, et f étant continue en x_0, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0, tel que $f(V_{x_0}) \subset V_{y_0}$.

La fonction $g \circ f$ est définie sur le voisinage V_{x_0}, dérivable en x_0 et sa dérivée est :

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0).} \qquad (1)$$

(1) $\Longleftrightarrow$ $g \circ f$ est différentiable en x_0 et l'on a :

$$\boxed{\mathrm{d}(g \circ f)(x_0) = \mathrm{d}g\,(f(x_0)) \circ \mathrm{d}f(x_0).} \qquad (1')$$

ou s'il n'y a pas d'ambiguïté sur x_0, $\mathrm{d}(g \circ f) = \mathrm{d}g \circ \mathrm{d}f$.

Preuve — D'après la définition de la dérivée :

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \varepsilon_1(x)(x - x_0)] \qquad (2)$$

$$g(y) - g(y_0) = [g'(y_0) + \varepsilon_2(y)(y - y_0)] \qquad (3)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{y \to y_0} \varepsilon_2(y) = 0$.

Posons $y = f(x)$ pour $x \in V_{x_0}$ dans ce cas : de (2) et (3) on tire :

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) &= [g'(f(x_0)) + \varepsilon_2(f(x))]\,[f'(x_0) + \varepsilon_1(x)]\,(x - x_0) \\ &= [g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)]\,(x - x_0) + \varepsilon_3(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_3(x) = g'\,[f(x_0)\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(f(x)]\,[f'(x_0) + \varepsilon_1(x)]$ et $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_3(x) = 0$, car $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_2(f(x)) = 0$.

3.3.7. Remarque

Si $z = g(y)$ est une fonction différentiable, notons $*y = f(x)$ le changement de variable où f est une fonction différentiable. La formule (1') peut s'écrire sous la forme.

$$\boxed{\mathrm{d}\,{*g} = *\,\mathrm{d}\,g} \tag{2}$$

En effet

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,{*g} &= \mathrm{d}\,[g\,(f(x))] = g\,(f(x))'\,\mathrm{d}\,x. \\ *\,\mathrm{d}\,g &= *(g'(y)\,\mathrm{d}\,y) = *g'(y) * \mathrm{d}\,y \\ &= *g'(y)\,\mathrm{d}\,{*y} \end{aligned}$$

($\mathrm{d}\,y$ étant la différentielle de l'application identique $y \to y$). Donc

$$*\,\mathrm{d}\,g = g'\,(f(x))\,\mathrm{d}\,f = [g'\,(f(x)) \cdot f'(x)]\,\mathrm{d}\,x$$

d'où

$$g\,(f(x))' = g'\,(f(x)) \cdot f'(x)$$

(2) exprime que le changement de variable et l'opération d de différen-tiation commutent.

La formule (2) qui peut être généralisée à des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est capitale en analyse.

3.4. Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis

Dans ce paragraphe, on établit un ensemble de résultats reliant les valeurs d'une fonction f aux extrémités d'un intervalle I à la valeur de la dérivée de f en un point convenable de l'intérieur de I.

3.4.1. Théorème de Rolle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ ($\overset{\circ}{I}$ désigne l'intérieur de I), alors $\forall a,\, b \in I$ tels que $a < b$, $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve — I étant un intervalle, si $a,\, b \in I$, alors $[a,b] \subset I$ et $]a,b[\subset \overset{\circ}{I}$: par suite f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

— Si f s'annule sur $[a,b]$ alors

$$f'(t) = 0 \quad \forall t \in]a,b[.$$

— Si f n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f prend certaines valeurs strictement positives sur

$[a, b]$. D'après le théorème 2.8.3. f atteint en un point c de $[a, b]$ sa borne supérieure, avec nécessairement $f(c) > 0$.

Par suite $c \in]a, b[$ et d'après 3.3.3.1 $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique — Si les hypothèses du théorème 3.4.1 sont vérifiées, alors soit a, $b \in I$, tels que $f(a) = f(b) = 0$, le graphe de la restriction de f à $]a, b[$ admet au moins une tangente horizontale (Fig. 3.4.1).

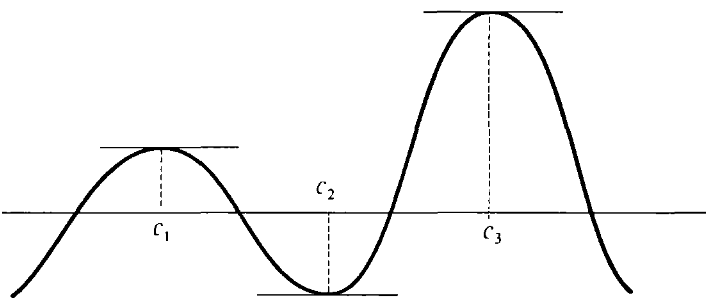

FIGURE: 3.4.1

Comme conséquence du théorème de Rolle on obtient le théorème fondamental suivant.

3.4.2. Théorème des accroissements finis

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors :

$$\boxed{\forall a, b \in I, \ \exists c \in]a, b[, \quad \text{tel que :} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)}$$

Preuve — On construit une fonction φ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, telle que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Soit $y = T(x)$ l'équation de la droite Δ passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ de la forme $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. Considérons

$$\varphi(x) = f(x) - T(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

D'après les hypothèses, φ est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, et puisque $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. **Interprétation géométrique** — Si les hypothèses du théorème 3.4.2. sont vérifiées, alors pour tous points

a, b de I, le graphe de la restriction de f à $]a, b[$ admet au moins une tangente parallèle à la droite joignant les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ (Fig.3.4.2).

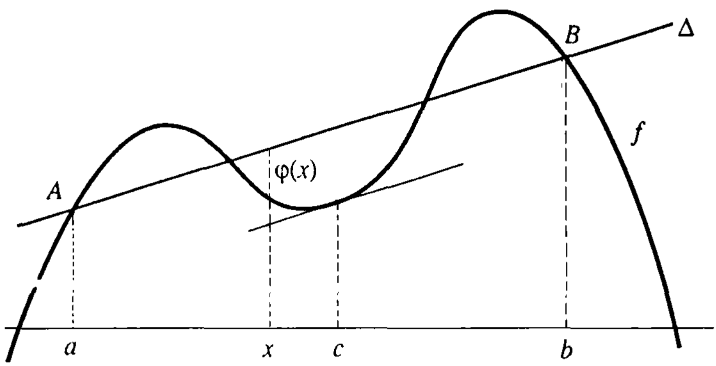

FIGURE: 3.4.2

Le théorème 3.4.2 peut être généralisé à deux fonctions de la façon suivante:

3.4.3. Théorème de Cauchy

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f et g sont continues sur I et dérivables sur $\overset{\circ}{I}$ alors

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall a, b \in I, \ \exists c \in]a, b[, \quad \text{tel que :} \\ f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)] \end{array}} \qquad (1)$$

Preuve

— si $g(b) = g(a)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$, tel que $g'(c) = 0$ et (1) est alors vérifiée.

— si $g(b) \neq g(a)$, considérons la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,(g(x) - g(a)).$$

φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle ; donc il existe $c \in]a, b[$, tel que:

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

3.5. Applications

3.5.1. Fonctions monotones

Proposition — Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$:

(i) si $f'(x) = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est constante sur I;

(ii) si $f'(x) > 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est strictement croissante sur I;

(iii) si $f'(x) \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est croissante sur I;

(iv) si $f'(x) < 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est strictement décroissante sur I;

(v) si $f'(x) \leq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est décroissante sur I.

La démonstration, facile, est laissée au lecteur (on appliquera le théorème des accroissements finis).

3.5.2. Calculs d'approximations

Le théorème des accroissements finis peut être appliqué pour calculer une valeur approximative d'une fonction en un point, et estimer l'erreur ainsi commise.

Exemple. Calculer $\sqrt{105}$.

On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ entre les points $a = 100$ et $b = 105$: on a :

$$\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{5}{2\sqrt{c}} \qquad 100 < c < 105$$

de $10 < \sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121} = 11$ on tire :

$$\frac{5}{2 \times 11} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2 \times 10}$$

et $10{,}22 < \sqrt{105} < 10{,}25$.

On peut encore améliorer cet encadrement : en effet de $\sqrt{105} < 10{,}25$ on tire que $\sqrt{c} < 10{,}25$ donc

$$0{,}243 < \frac{5}{2 \times (10{,}25)} < \sqrt{105} - 10$$

d'où

$$10{,}243 < \sqrt{105} < 10{,}250$$

3.5.3. Localisation des racines d'une fonction

Soient deux fonctions f et g telles que $f'(x) = g(x)$. Alors entre deux racines de f il existe au moins une racine de g (théorème de Rolle). Ainsi si $g(x) = \cos x$ et $f(x) = \sin x$, on déduit qu'entre deux racines de $\sin x$ il existe au moins une racine de $\cos x$. Mais de $g'(x) = -\sin x = -f(x)$, on conclut qu'entre deux racines de $\cos x$, il existe au moins une racine de $\sin x$. D'où les racines de $\cos x$ et $\sin x$ alternent dans $\mathbb{R}$.

3.5.4. Règles de l'Hôpital

Les deux théorèmes qui suivent sont très utiles pour évaluer certaines limites, et en particulier étudier les indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $0 \times \infty$.

3.5.4.1. Théorème (règle de l'Hôpital pour $\frac{0}{0}$)

Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, telles que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, et $f(a) = g(a) = 0$. Dans ce cas :

$$\boxed{\text{si} \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A}$$

Preuve — On suppose tout d'abord $-\infty < A < +\infty$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x_0, tel que $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon$, pour $a < x < x_0$. D'après le théorème de Cauchy 3.4.3, appliqué à l'intervalle $[a, x]$, il existe $c \in]a, x[$ tel que

$$= \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

d'où $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon$ (1), si $a < x < x_0$. D'où le résultat.

Dans le cas où $A = +\infty$ (resp. $-\infty$) l'inégalité (1) est remplacée par $\frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon}$ ou $\frac{f'(x)}{g'(x)} < -\frac{1}{\varepsilon}$ et le raisonnement est alors le même.

3.5.4.2. Théorème (règle de l'Hôpital pour $\frac{\infty}{\infty}$)

Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ continues et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que f et g admettent des limites infinies au point a.

Si $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ et $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Preuve — On suppose tout d'abord $-\infty < A < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe x_0 tel que $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon$ pour $a < x < x_0$ (1).

Soit $D(x, x_0)$ défini par :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} D(x, x_0)$$

où $D(x, x_0) = \dfrac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}$ et $\lim\limits_{x \to a} D(x, x_0) = 1$. (*)

D'après le théorème de Cauchy appliqué à $[x, x_0]$, il existe un point $c \in]x, x_0[$ tel que :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} D(x, x_0) = \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} [D(x, x_0) - 1]$$

l'égalité (*) implique qu'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a + \gamma[$, $|D(x, x_0) - 1| < \varepsilon$. Il en résulte que pour tout $x \in]a, a + \gamma[$, on a

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| |D(x, x_0) - 1| < \varepsilon + \varepsilon\,(|A| + \varepsilon) \qquad (2)$$

D'où le résultat.

Si $A = +\infty$,

$$(1) \text{ est remplacé par } \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} > \frac{1}{\varepsilon}$$

et

$$(2) \text{ est remplacé par } \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{1}{2} > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

3.5.4.3. Remarques

1) Les théorèmes 3.5.4.1 et 3.5.4.2 sont encore valables si $\lim\limits_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ainsi que dans les cas où $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

2) La condition $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ est une condition suffisante pour que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, mais ce n'est pas une condition nécessaire.

Exemple. — Soit $f(x) = x^2 sin\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, et $g(x) = x$. On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

alors que $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$.

3.5.4.4. Exemples

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$;

de même $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{nx^n} = 0.$

3) $\lim\limits_{x\to 0+} x^n \log x = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\log x}{\frac{1}{x^n}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n-1}}} = 0 = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^n}{n} = 0.$

3.5.5. Convexité des graphes

Le plan $\mathscr{P}$ étant rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on dira qu'un point M_1 d'ordonnée y_1 est « au dessus » d'un point M_0 d'ordonnée y_0 si $y_1 \geq y_0$.

Soit A un sous-ensemble de $\mathscr{P}$. On dira qu'un point M d'abscisse x_M est au-dessus de A (resp. au-dessous de A), si A contient des points d'abscisse x_M et si M est au dessus (resp. au-dessous) de tout point de A d'abscisse x_M.

3.5.5.1. Définition

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite *convexe*, si pour tout couple de points M_1, M_2 d'abscisses x_1, x_2 du graphe de f, tout point M du graphe de f d'abscisse $x \in [x_1, x_2]$, est au-dessous du segment $[M_1 M_2]$.

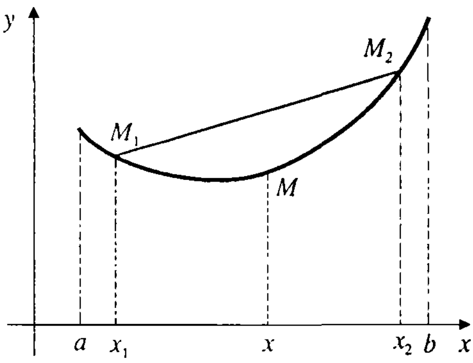

FIGURE: 3.5.5.1

3.5.5.2. Remarque

Il est facile de montrer que la définition 3.5.5.1 est équivalente à : f est convexe sur $[a, b]$ si pour tout couple de nombres réels x_1 et x_2 de

$[a, b]$, *et tout réel* λ *tel que* $0 \leq \lambda \leq 1$, *on a :*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \qquad (1)$$

(1) est dite ***inégalité de convexité.***

3.5.5.3. Définition

Une partie A de $\mathscr{P}$ est dite convexe si elle contient tout segment $[PQ]$ dont elle contient les extrémités P et Q.

3.5.5.4. Remarque

On pourra aisément démontrer, à titre d'exercice, qu'une fonction f est convexe si et seulement si l'ensemble A des points de $\mathscr{P}$ situés au-dessus du graphe de f est convexe.

Dans le cas où f est dérivable, on a le résultat suivant :

3.5.5.5. Théorème

Soit f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si f' est croissante sur $]a, b[$, alors f est convexe sur $[a, b]$. Réciproquement si f est convexe sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors f' est croissante sur $]a, b[$.

Preuve — Soient x et y deux points de $[a, b]$, avec $x < y$ et soit $z = \alpha y + (1-\alpha)x$, avec $0 < \alpha < 1$. On veut montrer que $f(z) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x)$, ou, ce qui revient au même, que :

$$(1-\alpha)\,[f(z) - f(x)] \leq \alpha\,[f(y) - f(z)]$$

D'après le théorème des accroissements finis il existe c et d, $x < c < z$ et $z < d < y$ tel que :

$$f(z) - f(x) = f'(c)(z-x)$$
$$f(y) - f(z) = f'(d)(y-z)$$

f' étant croissante on a : $f'(c) \leq f'(d)$ et puisque $(1-\alpha)(z-x) = \alpha(y-z)$ on déduit que :

$$(1-\alpha)\,[f(z) - f(x)] = (1-\alpha)f'(c)(z-x) \leq \alpha f'(d)(y-z) = \alpha\,[f(y) - f(z)]$$

d'où le résultat.

Réciproquement — Si f est convexe sur $[a, b]$, alors en tout point de $]a, b[$, f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite telles que :

$$f'_g(x_1) \leq f'_d(x_1) \leq f'_g(x_2) \leq f'_d(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in]a, b[\text{ et } x_1 < x_2 \qquad (2)$$

(voir exercice 7).

Si f est dérivable sur $]a, b[$, alors $f'_d(x) = f'_g(x) = f'(x)$, la croissance de f' résulte alors de (2).

3.5.5.6. Remarque

On peut montrer que le graphe de toute fonction convexe, dérivable, est au-dessus de chacune de ses tangentes.

En effet l'équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

On veut montrer que

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) \geq 0.$$

D'après le théorème des accroissements finis, on a:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c) \quad \text{où } c \text{ est compris entre } x_0 \text{ et } x.$$

L'inégalité à démontrer est alors :

$$(x - x_0)\,(f'(c) - f'(x_0)) \geq 0.$$

Elle résulte du fait que f' est croissante.

3.6. Théorème des fonctions inverses

Soit $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A tout point $y \in f(S)$ on associe

$$e_y = \{x \in S,\ f(x) = y\}.$$

Si pour tout $y \in f(S)$, $e_y = \{x\}$, on définit alors une application

$$\begin{aligned} \varphi : f(S) &\to S \\ y &\mapsto x \quad \text{tel que} \quad e_y = \{x\} \end{aligned}$$

φ s'appelle la *fonction inverse* ou *réciproque* de f. Le problème des fonctions inverses est de trouver les conditions suffisantes sur f, pour assurer l'existence de φ et dire quand φ est continue (resp. dérivable) si f est continue (resp. dérivable).

En général ce problème n'admet pas de solution globale, comme le montre l'exemple de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

qui n'est pas inversible sur $\mathbb{R}$ tout entier mais seulement sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_-$.

3.6.1. Théorème

Soit f une fonction numérique, de domaine de définition $D_f \subseteq \mathbb{R}$ vérifiant dans un intervalle I ($I \subseteq D_f$) les conditions suivantes :

1) f est continue sur I

2) f est strictement monotone sur I.

Il existe, alors, une fonction unique φ telle que :

$D\varphi = f(I) = J$ est un intervalle,

$f(\varphi(y)) = y$ pour $y \in J$.

$\varphi(y) \in I$.

φ est continue et strictement monotone (dans le même sens de monotonie que f) sur J. φ est appelée une <u>*détermination de la fonction réciproque de φ associée à I.*</u>

Si de plus, $f'(x_0)$ existe en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$, alors φ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration

i) Si f est continue sur l'intervalle I, d'après 2.8.1, $f(I) = J$ est un intervalle.

ii) Supposons f strictement croissante sur I, alors f admet une fonction réciproque φ définie sur $J = f(I)$ et strictement croissante sur J. En effet si $y_1 \in J$, il existe $x_1 \in I$ tel que $y_1 = f(x_1)$, et il n'existe pas un autre $x_2 \neq x_1$ tel que $f(x_2) = y_1$: si $x_2 \neq x_1$, ou bien $x_2 > x_1$ et on a $f(x_2) > f(x_1)$, ou bien $x_2 < x_1$ et on a $f(x_2) < f(x_1)$. En posant $x_1 = \varphi(y_1)$, on définit une fonction sur J vérifiant l'égalité $f(\varphi(y)) = y$, $\forall y \in J$. De plus φ est strictement croissante car si $x_1 = \varphi(y_1)$ et $x_2 = \varphi(y_2)$, $y_2 - y_1$ et $x_2 - x_1$ sont de même signe.

iii) Montrons que φ est continue sur J. Supposons encore que f est strictement croissante. Soit $y_0 \in J$, il faut montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists h > 0$, tel que :

$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon.$$

Posons $x_0 = \varphi(y_0) \iff y_0 = f(x_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$, choisissons un entier n tel que :

$$\left[x_0 - \frac{\varepsilon}{n}, x_0 + \frac{\varepsilon}{n}\right] \subset I.$$

Par suite de la croissance stricte de f, on a

$$f\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{n}\right) = y_0 + c \quad (\text{avec } c > 0) \text{ et } \quad f\left(x_0 - \frac{\varepsilon}{n}\right) = y_0 - d \quad (\text{avec } d > 0).$$

Choisissons un nombre $\eta > 0$, tel que :

$$[y_0 - \eta, y_0 + \eta] \subset]y_0 - d, y_0 + c[\subset J.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, et de la stricte croissance de f, pour tout $y \in]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$ il existe un et un seul point

$$x \in \left]x_0 - \frac{\varepsilon}{n}, x_0 + \frac{\varepsilon}{n}\right[\quad \text{tel que} \quad y = f(x) \iff x = \varphi(y)$$

d'où

$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon.$$

iv) On suppose que $f'(x_0)$ existe en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$. Soit $y_0 = f(x_0) \iff x_0 = \varphi(y_0)$, on cherche la limite, si elle existe, du rapport $\frac{\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)}{k}$ quand $k \to 0$. Si k est assez petit, $y_0 + k$ est une valeur prise par f. On pose $h = \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)$. Alors $x_0 = \varphi(y_0)$ et $\varphi(y_0 + k) = x_0 + h \Rightarrow f(x_0 + h) = y_0 + k$. D'où $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$.

si $h \to 0$ on a $k \to 0$ (f est continue en x_0)

si $k \to 0$ on a $h \to 0$ (φ est continue en y_0)

par suite

$$\lim_{k\to 0} \frac{\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

3.6.2. Exemple

Soit $f(x) = x^3 - 2x + 1$. La restriction de f à l'intervalle $\left]\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$ admet une fonction réciproque Φ. Calculons $\Phi'(0)$ et $\Phi'(5)$. $f'(x) = 3x^2 - 2$. Donc f est strictement croissante sur $\left]\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$.

On sait que $\Phi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. $f(1) = 0 \iff 1 = \Phi(0)$, et puisque $f'(1) = 1$ on obtient $\Phi'(0) = \frac{1}{f'(1)} = 1$.

De même $f(2) = 5 \iff 2 = \Phi(5)$, et puisque $f'(2) = 10$ on a $\Phi'(5) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{10}$.

3.6.3. Applications

3.6.3.1. Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques.

THÉORÈME ET DÉFINITIONS

Les restrictions respectives des fonctions sinus, cosinus et tangente aux intervalles $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[0, \pi]$ et $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ admettent des fonctions réciproques, appelées Arcsinus, Arccosinus et Arctangente, définies et continues sur $[-1, +1]$ pour les deux premières et sur $]-\infty, +\infty[$ pour la dernière.

Elles vérifient les propriétés suivantes :

(1) $\sin(\text{Arcsin}\, x) = x$; $\quad -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arcsin}\, x \leq \frac{\pi}{2}$.

(2) $\cos(\text{Arccos}\, x) = x$; $\quad 0 \leq \text{Arccos}\, x \leq \pi$.

(3) $\operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} x) = x$: $\quad -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$.

De plus, Arcsin, Arccos sont dérivables sur $]-1, 1[$ et Arctg sur $\mathbb{R}$.

(4) $(\operatorname{Arcsin} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1, 1[$.

(5) $(\operatorname{Arccos} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1, 1[$.

(6) $(\operatorname{Arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[$.

D'où les courbes représentatives :

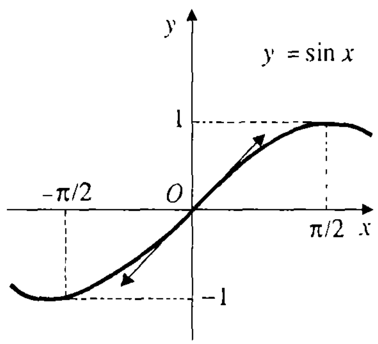

FIGURE: 3.6.3.1A

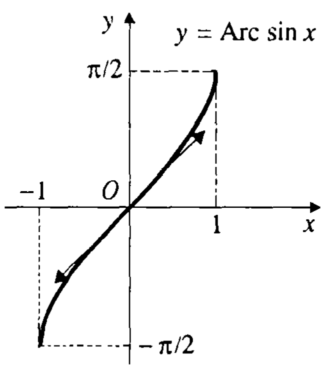

FIGURE: 3.6.3.1B

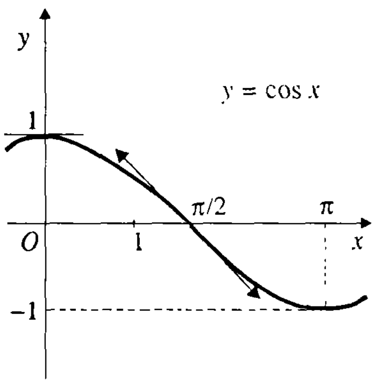

FIGURE: 3.6.3.1C

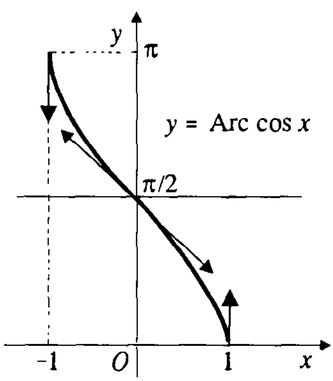

FIGURE: 3.6.3.1D

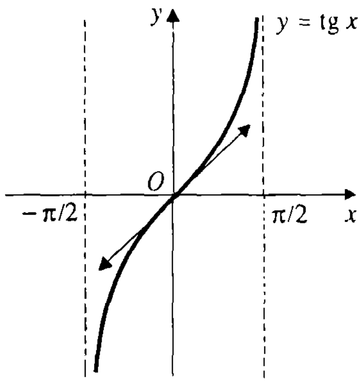

FIGURE: 3.6.3.1E

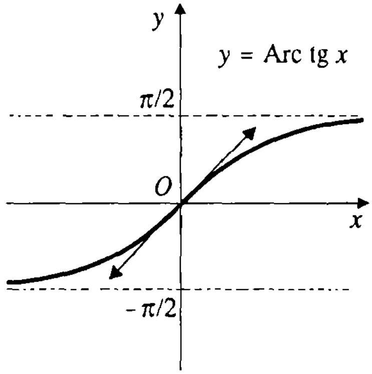

FIGURE: 3.6.3.1F

Démonstration — Faisons la démonstration pour la fonction sinus. La fonction sinus est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et strictement croissante sur$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sa dérivée, $\cos x$, étant strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (Proposition 3.5.1). D'après le théorème 3.6.1, elle admet une fonction réciproque notée Arcsin, définie, continue et strictement croissante sur l'intervalle $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ et vérifiant :

$$\sin(\text{Arcsin}\, x) = x \quad \text{pour } x \in [-1, 1],$$
$$\text{Arcsin}\,(\sin y) = y \quad \text{pour } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

De plus en tout point $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $(\sin y)' = \cos y \neq 0$. Donc d'après le théorème 3.6.1, Arcsin x est dérivable sur $]-1, 1[$, et on a :

$$(\text{Arcsin}\, x)' = \frac{1}{\cos y}, \quad \text{avec} \quad x = \sin y, \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Par suite : $(\text{Arcsin}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Un raisonnement analogue pourra être fait pour les autres fonctions.

3.6.3.2. Les fonctions hyperboliques et leurs fonctions réciproques

Notations :

cosinus hyperbolique = ch

sinus hyperbolique = sh

tangente hyperbolique =

Argument cosinus hyperbolique = Argch

Argument sinus hyperbolique = Argsh

Argument tangente hyperbolique = Argth

THÉORÈME ET DÉFINITION

Les fonctions sh, ch et sont définies par les formules suivantes :

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) \;; \quad \mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \;; \quad x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}.$$

sh et sont inversibles sur $]-\infty, +\infty[$ et leurs fonctions réciproques sont notées Argsh et Argth. La restriction de ch à l'intervalle $[0, +\infty[$ admet une fonction réciproque notée Argch.

Les fonctions Argsh, Argch et Argth sont définies et continues respectivement sur $]-\infty, +\infty[$, $[1, +\infty[$ et $]-1, 1[$. En outre :

$$(\mathrm{Argsh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \forall x \in]-\infty, +\infty[$$

$$(\mathrm{Argch}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall x \in]1, +\infty[$$

$$(\mathrm{Argth}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}, \qquad \forall x \in]1, +1[.$$ **Commentaires**

(i) Des formules évidentes :

$$\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = \mathrm{e}^x \; \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = \mathrm{e}^{-x}$$

on déduit la formule fondamentale :

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

(ii) ch x est paire, sh x et x sont impaires. Pour $x > 0$, ch x, sh x et x ont des valeurs positives.

(iii) ch, sh et sont dérivables et :

$$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x \;; \; (\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x \;; \; (x)' = 1 - {}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

quand x croît de 0 à $+\infty$, ch x croît de 1 à $+\infty$, sh x de 0 à $+\infty$ et x de 0 à 1.

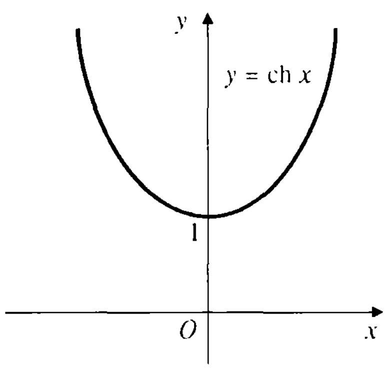

FIGURE: 3.6.3.2A

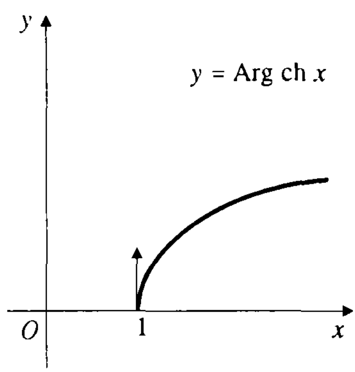

FIGURE: 3.6.3.2B

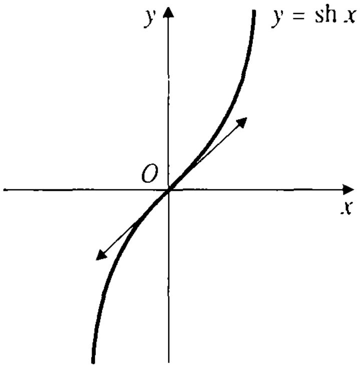

FIGURE: 3.6.3.2C

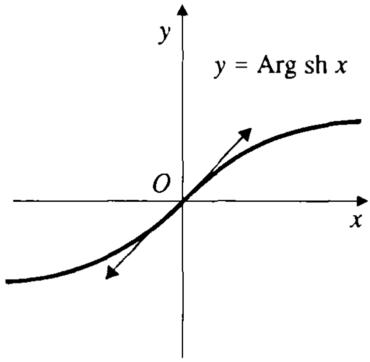

FIGURE: 3.6.3.2D

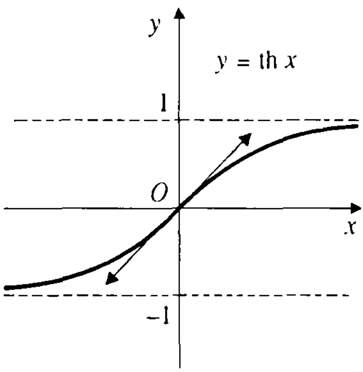

FIGURE: 3.6.3.2E

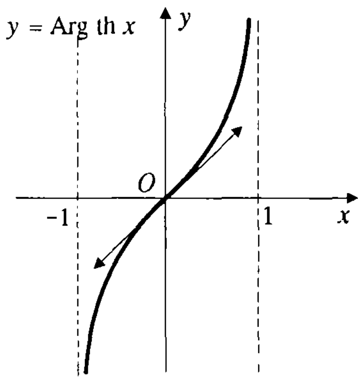

FIGURE: 3.6.3.2F

(iv) La fonction ch x est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, sa dérivée sh x sur $]0, +\infty[$ est strictement positive. D'après le théorème 3.6.1, elle admet une fonction réciproque, notée Argch, définie, continue et strictement croissante sur $\mathrm{ch}([0, +\infty[) = [1, +\infty[$.

De plus en tout point $y \in]0, +\infty[$ $(\mathrm{ch}\, y)' = \mathrm{sh}\, y \neq 0$. Donc d'après le théorème 3.6.1., Argch x est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a :

$$(\mathrm{Argch}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{sh}\, y} \quad \text{avec} \quad x = \mathrm{ch}\, y, \quad y \in]0, +\infty[$$

Par suite : $(\mathrm{Argch}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. $\quad (\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y = 1)$.

Un raisonnement analogue pourra être fait pour l'étude de Argsh et Argth.

v) Les fonctions Argsh, Argch, et Argth peuvent se mettre sous forme de logarithmes népériens :

$$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
$$\operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Démontrons, par exemple, la première formule.

$$y = \operatorname{Argsh} x \iff x = \operatorname{sh} y$$

de $\operatorname{ch}^2 y = \operatorname{sh}^2 y + 1 = 1 + x^2$ on tire $\operatorname{ch} y = \sqrt{1+x^2}$ car $\operatorname{ch} y > 0$, d'où $e^y = \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y = x + \sqrt{1+x^2}$ et $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

3.7. Suites de fonctions différentiables

Soit (f_n) une suite fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a vu, dans le chapitre précédent, que toute limite uniforme de fonctions continues est continue.

L'exemple suivant montre que cette condition n'est pas suffisante si on remplace la propriété de continuité par celle de dérivabilité : considérons la suite de fonctions définies par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n}$. Pour tout n, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la suite (f_n) converge sur $\mathbb{R}$ (uniformément sur tout intervalle $[a,b]$) vers $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.

D'ailleurs le théorème d'approximation [exercice 26, Chapitre 2] de Weierstrass affirme que toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes, qui sont dérivables.

En outre le même Weierstrass a donné un exemple d'une suite de fonctions dérivables qui converge sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point.

Remarquons que la suite de fonctions dérivables

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin n\pi x$$

converge vers la fonction dérivable $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, alors que la suite des dérivées $f_n'(x) = \cos n\pi x$ ne converge pas.

Le théorème important suivant donne des conditions suffisantes sur la suite (f_n), dont la principale est la convergence uniforme de la suite des fonctions dérivées (f_n'), qui entraînent la dérivabilité de f.

3.7.1. Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions définies et dérivables sur un intervalle I borné, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose :

— qu'en un point x_0 de I, la suite $(f_n(x_0))$ converge.

— la suite des fonctions dérivées (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g. Dans ce cas, la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f dérivable sur I, telle que $f' = g$.

Démonstration — Soient a, b $(a < b)$ les extrémités de I et $x \in I$. Si m, n sont deux entiers, on applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f_m - f_n$ sur l'intervalle d'extrémités x_0, x. Il existe un point y (dépendant de m et n) entre x_0 et x tel que :

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)\left(f'_m(y) - f'_n(y)\right)$$

d'où

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a)\,|f'_m(y) - f'_n(y)| \quad (1)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) > 0$, tel que pour m, $n \geq n_0$ on a : $|f'_n(x) - f'm(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $\forall x \in I$ (convergence uniforme de (f'_n) sur I)

Pour $\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\exists n_1(\varepsilon, x_0)$, entier positif, tel que si m, $n \geq n_1$ on a :

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(convergence de } (f_n(x_0))\text{)}.$$

D'où, si $n_2 = \sup(n_1, n_0)$, alors pour m, $n \geq n_2$, on a d'après (1) $|fm(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in I$ (voir exercice 12, Chap. 2).

Donc la suite (f_n) converge uniformément vers f, et puisque les f_n sont continues, alors f est continue sur I (théorème 2.9.2.9). Pour établir l'existence de la dérivée de f en un point c de I, on applique le théorème des accroissements finis à $f_m - f_n$ sur l'intervalle d'extrémités c et x.

Donc il existe un point z (dépendant de m et n) tel que :

$$\left(f_m(x) - f_n(x)\right) - \left(f_m(c) - f_n(c)\right) = (x - c)\left(f'_m(z) - f'_n(z)\right).$$

Donc pour $c \neq x$, on a,

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq |f'_m(z) - f'_n(z)| \quad (2)$$

la convergence uniforme de (f'_n) entraîne : pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists M(\varepsilon)$, tel que si m, $n \geq M$, on a :

$$|f'_m(z) - f'_n(z)| < \varepsilon. \quad \forall z \in I.$$

Donc pour m, $n \geq M$, (2) entraîne :

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x)) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Si m tend vers $+\infty$, (3) entraîne :

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-\frac{f_n(x))-f_n(c)}{x-c}\right|\leq\varepsilon. \tag{4}$$

D'autre part il existe $N(\varepsilon)$, tel que si $n\geq N$, on a

$$|f_n'(c)-g(c)|<\varepsilon,\ \text{pour tout } c\in I \tag{5}$$

(convergence uniforme de (f_n') vers g).

Soit $N_0=\sup(N,M)$ il existe $\delta_{N_0}(\varepsilon)>0$ tel que si $0<|x-c|<\delta$, on a :

$$\left|\frac{f_{N_0}(x)-f_{N_0}(c)}{x-c}-f_{N_0}'(c)\right|<\varepsilon. \tag{6}$$

de (4), (5) et (6) on tire :

$$\text{si }\ 0<|x-c|<\delta_{N_0}(\varepsilon).\quad \text{alors}\quad \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-g(c)\right|<3\varepsilon.$$

3.7.2. Remarques

i) on a vu [théorème 2.9.29] que si une suite $\{f_n\}$ de fonctions continues converge uniformément vers f, alors f est continue, ce qui peut se traduire par :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to+\infty}(f_n(x)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0}f_n(x)\right) \tag{1}$$

(1) traduit que la continuité est « transparente » par rapport à la notion de limite.

ii) de même sous les hypothèses du théorème 3.7.1 on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\lim_{n\to+\infty}(f_n(x)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}f_n(x)\right)$$

la dérivation est « transparente » par rapport à la notion de limite. Les propriétés (i) et (ii) sont intimement liés à la notion de la convergence uniforme. On verra un autre exemple dans le chapitre sur l'intégration.

iii) Le théorème 3.7.1 est un moyen puissant pour définir de nouvelles fonctions, nous en donnerons des exemples dans le § 3.9.

3.8. À RETENIR

i) f est dérivable en x_0 si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{f(x_0+h)-f(x_0)=hA+h\varepsilon(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0}$$

A est par définition la dérivée de f en x_0, notée $f'(x_0)$.

ii) L'application $h \to f'(x_0)h$ est appelée la différentielle de f en x_0, notée $\mathrm{d}f(x_0)$ ou simplement $\mathrm{d}f$. $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ où $\mathrm{d}x$ est la différentielle de l'application identique $h \to h$ on a:

$$\boxed{*\mathrm{d}f = \mathrm{d}*f}$$

où $*$ le changement de variable $*x = g(z)$, dérivable, qu'on effectue dans $f'(x)$.

iii) *Théorème des accroissements finis*

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Alors: $\forall a$, $b \in I$, $\exists c \in]a,b[$, tel que, $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.

iv) *Théorème des fonctions inverses*
Soit f une fonction numérique vérifiant dans un intervalle I ($I \subset D_f$) les conditions suivantes :

1) f continue sur I

2) f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Il existe une fonction unique φ telle que
$D\varphi = f(I) = J$ est un intervalle.
$f(\varphi(y)) = y\ \forall y \in J$ et $\varphi(y) \in I$.
φ est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur J.
φ est une détermination de la fonction réciproque de f associée à I.

Si de plus f admet une dérivée $f'(x) \neq 0$ alors φ admet également une dérivée au point $y = f(x)$ et $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

v) *Suite de fonctions différentiables*

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies et dérivables sur un intervalle borné I. Si $(f_n(x_0))$ converge pour un $x_0 \in I$ et $\{f'_n\}$ converge uniformément sur I vers g alors :

— (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f, dérivable sur I, telle que : $f' = g$.

3.9. Exercices et problèmes

1) Soient k un nombre réel et f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + kx \quad \text{si } x \neq 0, \quad \text{et } f(0) = 0.$$

a) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en tout point de $\mathbb{R}$.

b) On suppose $0 < |k| < 1$. Démontrer que pour tout nombre réel $\alpha > 0$, la fonction dérivée f' change de signe sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$. La fonction $x \to f'(x)$ est elle continue sur $\mathbb{R}$?

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[4]{|x|}}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et } f(0) = 0.$$

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f' est continue mais n'est pas bornée.

3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f.

b) f' est elle continue, bornée?

4) Montrer que la fonction h définie sur l'intervalle $]2, +\infty[$ par $h(x) = x^3 - 3x^2$ admet une fonction réciproque φ strictement croissante et dérivable ; déterminer l'intervalle de définition de φ. Calculer $\varphi(-2)$ et $\varphi'(-2)$.

5) La lumière émanant d'un point source S illumine une surface circulaire C, avec une intensité proportionnelle au cosinus de l'angle θ d'incidence et inversement proportionnelle au carré de la distance d à la source (voir figure).

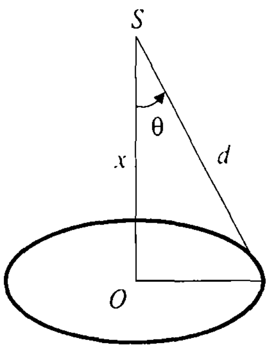

FIGURE: 3.9.5

A quelle distance x doit-on placer la source lumineuse S au-dessus du centre d'un disque de 12 cm de rayon pour que l'illumination soit maximale?

6) a) Montrer que la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ est indéfiniment dérivable et vérifie $g^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \geq 1$.

b) Soit $a > 0$. $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f est nulle sur $]-a, a[$, alors f est aussi nulle sur $[-a, a]$.

c) On suppose que f est indéfiniment dérivable sur $[-a, a]$ et que :

i) $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \geq 1$;

ii) il existe $\rho > 0$ tel que $\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!} \leq \rho^n$ pour tout $x \in [-a, a]$ et pour tout $n \geq 1$. Montrer que f est nulle sur $[-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}]$.

d) On suppose que a est de la forme $\dfrac{k}{\rho}$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Déduire de b) que f est nulle sur $[-a, a]$.

7) Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I, si $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{1}{2}[f(x) + f(y)]$ pour tout couple (x, y) de $I \times I$.

a) On suppose f continue et convexe sur I.

i) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$

pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de I.

ii) Montrer que si $x, y \in I$ et si $t \in [0, 1]$, alors

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

iii) Montrer que si $x < y < z$ sont des éléments de I, alors

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

En déduire que si $w < x < y < z$ sont des éléments de I, alors

$$\frac{f(x) - f(w)}{x - w} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

iv) Montrer que f possède une dérivée à gauche et une dérivée à droite, et que les points x de I tels que $f'(x)$ n'existe pas constituent un ensemble dénombrable.