

Chapitre 11 : APPLICATIONS DES DÉTERMINANTS

Dans ce chapitre, nous allons appliquer la théorie des déterminants à la recherche de l'inverse d'une matrice carrée inversible, à la détermination du rang d'une application linéaire, puis à la résolution des systèmes d'équations linéaires. Cette étude montre l'importance fondamentale des déterminants dans les applications et justifie amplement l'intérêt qui leur est accordé.

Nous désignerons toujours par K un corps commutatif qui, dans la plupart des cas sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

11.1. Calcul de l'inverse d'une matrice carrée

D'après le Théorème 10.3.3.2 d), une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Nous nous proposons de montrer comment utiliser les déterminants pour calculer la matrice inverse d'une matrice inversible.

11.1.0.1. Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n . On appelle matrice complémentaire de A , et on note $\tilde{A}$, la transposée de la matrice des cofacteurs de A .

Autrement dit, si $\tilde{A} = (b_{ij})$, on a

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

où A_{ij} est la matrice déduite de A par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

11.1.0.2. Théorème

Quelle que soit la matrice $A \in M_p(K)$, on a

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A) \cdot I_p$$

où I_p désigne la matrice unité d'ordre p .

Par suite, si A est inversible, son inverse est donné par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$$

Démonstration. Soit $A = (a_{ij})$. Posons

$$\tilde{A} = (b_{ij}) \text{ et } A\tilde{A} = (c_{ij}).$$

On a

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji}).$$

Par définition du produit de deux matrices, on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+j} a_{ik} \det(A_{jk}).$$

Si $i = j$, la formule (10.3.4.5) montre que c_{ii} est égal à $\det(A)$. Si $i \neq j$, on voit que c_{ij} n'est autre que le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A la $j^{\text{ème}}$ ligne par la $i^{\text{ème}}$ sans toucher aux autres. Cette matrice ayant deux lignes identiques, son déterminant est nul : $c_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

On a donc

$$A\tilde{A} = \det(A) \cdot I_p.$$

On montrerait de même que

$$\tilde{A}A = \det(A) \cdot I_p.$$

Si la matrice A est inversible, on a $\det(A) \neq 0$. Alors

$$A \cdot \frac{\tilde{A}}{\det(A)} = \frac{\tilde{A}}{\det(A)} \cdot A = I_p,$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}.$$

Règle pratique :

Posons $A^{-1} = (\alpha_{ij})$. Alors si Δ_{ij} est le cofacteur de a_{ij} dans A , la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$$

montre que

$$\alpha_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\det(A)}.$$

Ainsi, on obtient l'inverse d'une matrice inversible A d'ordre $p > 1$, en formant la transposée $\tilde{A}$ de la matrice des cofacteurs de A , puis en divisant tous les éléments de $\tilde{A}$ par $\det(A)$.

11.1.0.3. Exemple

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si $\det(A) = ad - bc \neq 0$, A est inversible. On a

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix};$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

11.2. Détermination du rang

Nous allons appliquer la théorie des déterminants à la recherche pratique du rang d'une application linéaire, d'une matrice ou d'un système de vecteurs. Le calcul du rang d'une application linéaire ou d'une famille de vecteurs peut d'ailleurs se ramener à celui du rang d'une matrice puisque le rang d'une application linéaire est celui de sa matrice dans des bases données, qui est aussi celui des vecteurs colonnes.

Posons la définition suivante :

11.2.0.1. Définition

Soit A une matrice de type (m, n) . On appelle **matrice extraite de A** , toute matrice obtenue en supprimant un certain nombre de lignes et un certain nombre de colonnes de A .

On appelle **déterminant extrait de A** , tout déterminant d'une matrice carrée extraite de A .

Nous ne considérerons que les matrices carrées extraites et nous avons le résultat suivant.

11.2.0.2. Théorème

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type (m, n) à éléments dans K . Alors le rang de A est le plus grand entier r tel que l'on puisse extraire de A au moins une matrice carrée inversible d'ordre r .

Démonstration. Soient E un K -espace vectoriel de dimension m et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E . Soient $x_1, \dots, x_n$ les vecteurs colonnes de la matrice A :

$$x_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i \quad (1 \leq j \leq n).$$

D'après le Théorème 9.2.1.5 le rang de la famille $\{x_1, \dots, x_n\}$ est égal au rang de la matrice A .

Soit ρ le rang de la matrice A et soit r le plus grand entier tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée inversible d'ordre r . On a évidemment

$$r \leq \inf(m, n).$$

Nous allons montrer que $\rho = r$.

Démontrons d'abord que $\rho \geq r$. Soit M une matrice carrée inversible d'ordre r extraite de A . On peut supposer, en changeant au besoin la numérotation des lignes et des colonnes de A , que M est la matrice formée par les r premières lignes et les r premières colonnes de A . Posons :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & M & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les r premiers vecteurs colonnes $x_1, \dots, x_r$ de A sont linéairement indépendants ; sinon l'un d'eux, x_1 par exemple, serait une combinaison linéaire des autres :

$$x_1 = \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r.$$

Dans la matrice M , les éléments de la première colonne seraient des combinaisons linéaires des éléments correspondants des autres colonnes et le déterminant de M serait nul contrairement au fait que M est inversible.

Comme parmi les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ il existe r vecteurs linéairement indépendants, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \dots, x_n$, c'est-à-dire le rang ρ de A , est supérieure ou égale à r .

Démontrons maintenant que $r \geq \rho$. Pour cela, nous allons extraire de la matrice A , une matrice carrée inversible d'ordre ρ .

Par définition du rang de la matrice A , il existe ρ vecteurs colonnes de A qui sont linéairement indépendants. Soit A' la matrice de type (m, ρ) obtenue en supprimant $n - \rho$ colonnes de A . On peut extraire de A' , ρ vecteurs lignes

linéairement indépendants puisque le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes qui est aussi le rang de ses vecteurs lignes. Soit A'' la matrice carrée d'ordre ρ obtenue en supprimant $m - \rho$ lignes de A' . Alors A'' est une matrice inversible de rang ρ extraite de A . Donc on a $r \geq \rho$.

On en déduit $r = \rho$ et le théorème est démontré. $\square$

Nous déduisons de ce théorème un critère général pour que des vecteurs soient linéairement indépendants.

11.2.0.3. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E définis par :

$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad (1 \leq j \leq p).$$

Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ la matrice des coordonnées de ces vecteurs par rapport à la base B . Alors pour que $x_1, \dots, x_p$ soient linéairement indépendants, il faut et il suffit que l'on puisse extraire de M une matrice carrée inversible d'ordre p .

Démonstration. Nous savons que si $p > n$, les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont linéairement dépendants. Supposons donc $p \leq n$. La famille $\{x_1, \dots, x_p\}$ est libre si et seulement si le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille est de dimension p , c'est-à-dire si et seulement si le rang de $\{x_1, \dots, x_p\}$ est égal à p . D'après le Théorème 9.2.15, le rang de la famille $\{x_1, \dots, x_p\}$ est égal à celui de la matrice M . Le Théorème 11.2.0.2 montre alors que les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont linéairement indépendants si et seulement si on peut extraire de M une matrice carrée inversible d'ordre p . $\square$

Caractérisation du sous-espace engendré par un système libre.

Le résultat suivant nous sera fort utile dans l'étude des systèmes d'équations linéaires.

11.2.0.4. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x_1, \dots, x_r$, r vecteurs linéairement indépendants de E ($r < n$) définis par

$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad (1 \leq j \leq r).$$

Alors pour qu'un vecteur v de composantes $b_1, \dots, b_n$ de E appartienne au sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \dots, x_r$, il faut et il suffit que les $n - r$ déterminants

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & b_k \end{vmatrix}$$

soient nuls pour tout $k \in \{r+1, \dots, n\}$.

Démonstration. Comme les vecteurs $x_1, \dots, x_r$ sont linéairement indépendants, on peut extraire de la matrice $M = (a_{ij})$ qui est de type (n, r) une matrice carrée P inversible d'ordre r . En changeant au besoin l'ordre de numérotation des lignes et des colonnes de M , nous pouvons supposer que

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

Considérons la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & b_n \end{pmatrix}$$

dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs $x_1, \dots, x_r, v$.

Si le vecteur v appartient au sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \dots, x_r$, on a $\text{rg}(M') < r+1$ et, puisque P est inversible, le rang de M' est égal à r . Tous les déterminants d'ordre $r+1$ extraits de M' sont donc nuls. En particulier, tout déterminant d'ordre $r+1$ extrait de M' et dont $\det(P)$ est un déterminant extrait est nul. Autrement dit, tous les déterminants Δ_k sont nuls pour $k = r+1, \dots, n$.

Réciproquement, supposons que $\Delta_k = 0$ pour tout $k \in \{r+1, \dots, n\}$.

Si $k \leq r$, Δ_k est évidemment nul car ce déterminant a deux lignes identiques.

Si $k > r$, en développant Δ_k par rapport à la ligne d'indice $r+1$, on obtient

$$\sum_{j=1}^r a_{kj} \Delta_{r+1,j} + \det(P) b_k = 0$$

où les $\Delta_{r+1,j}$ sont les cofacteurs des éléments de la ligne d'indice $r+1$ de Δ_k .

On en déduit :

$$x_1 \Delta_{r+1,1} + x_2 \Delta_{r+1,2} + \dots + x_r \Delta_{r+1,r} + \det(P) v = 0,$$

ce qui achève la démonstration du théorème. $\square$

Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Alors le système (11.3.1.1) est équivalent à l'équation matricielle

$$(11.3.2.1) \quad AX = B$$

dans laquelle A et B sont des matrices connues et X une matrice inconnue. On dit que (11.3.2.1) est la **forme matricielle** du système 11.3.1.1.

11.3.2.1. Définition

On appelle rang du système (11.3.1.1) le rang de la matrice A de ce système.

b) Soient $A_1, \dots, A_n$ les vecteurs colonnes de la matrice A ; ce sont des vecteurs de K^m définis par leurs composantes dans la base canonique :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Notons encore B le vecteur de K^m ayant pour composantes $b_1, \dots, b_m$.

Le système (11.3.1.1) est alors équivalent à l'équation vectorielle dans K^m :

$$(11.3.2.2) \quad x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = B.$$

On dit que (11.3.2.2) est la **forme vectorielle** du système (11.3.1.1).

Résoudre le système (11.3.1.1) revient donc à chercher si B est combinaison linéaire des vecteurs $A_1, \dots, A_n$, i.e. si B appartient au sous-espace vectoriel de K^m engendré par les vecteurs $A_1, \dots, A_n$ et, dans l'affirmative, à trouver toutes les décompositions possibles de B sur la famille $\{A_1, \dots, A_n\}$.

11.4. Système de Cramer

Dans ce paragraphe, nous supposons que $m = n$; autrement dit, le système considéré contient autant d'équations que d'inconnues.

11.4.1. DÉFINITION

11.4.1.1. Définition

On dit qu'un système de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si la matrice A de ce système est inversible.

Un système de Cramer peut toujours s'écrire sous la forme matricielle

$$(11.4.1.1) \quad AX = B.$$

Nous allons voir qu'un tel système possède toujours une solution unique donnée par :

$$X = A^{-1}B.$$

On appelle **déterminant du système** (11.4.1.1) le déterminant de la matrice A de ce système.

Le théorème suivant donne plusieurs caractérisations des système de Cramer.

11.4.1.2. Théorème

Soit

[illegible]

un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle : $AX = B$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) Quel que soit B , le système (11.4.1.2) admet une solution et une seule.
- b) Quel que soit B , le système (11.4.1.2) admet au moins une solution.
- c) Quel que soit B , le système (11.4.1.2) admet au plus une solution.
- d) Le système homogène associé au système (11.4.1.2) n'admet que la solution triviale.
- e) La matrice A du système (11.4.1.2) est inversible.
- f) $\det(A) \neq 0$.

La solution unique du système (11.4.1.2) est alors

$$X = A^{-1}B.$$

Démonstration. Soit u l'endomorphisme de K^n dont la matrice par rapport à la base canonique de K^n est A . L'assertion a) signifie que u est bijectif, b) que u

est surjectif, c) que u est injectif, d) que le noyau de u est réduit à $\{0\}$, e) que u est inversible, et f) que $\det(u) \neq 0$. Les assertions a), b), c), d) et e) sont donc équivalentes d'après le Corollaire 8.2.3.5 et le Théorème 10.3.2.3 d).

En outre, comme la matrice A est inversible, on obtient la solution unique du système (11.4.1.2) en multipliant à gauche les deux membres par A^{-1} . On obtient

$$X = A^{-1}B. \quad \square$$

11.4.2. FORMULES DE CRAMER

Si on a déjà calculé la matrice inversée A^{-1} , la formule $X = A^{-1}B$ permet d'obtenir facilement la solution unique d'un système de Cramer. Sinon, on peut utiliser les formules de Cramer que nous allons établir.

11.4.2.1. Théorème

Soit

$$(11.4.2.1) \quad \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i = b_j, \quad (1 \leq j \leq n)$$

un système de Cramer.

La solution unique $(x_1, \dots, x_n)$ de ce système est donnée par les formules de Cramer :

$$(11.4.2.2) \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (1 \leq i \leq n),$$

où Δ est le déterminant du système et où Δ_i est le déterminant déduit de Δ en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne par la colonne des termes constants $b_1, \dots, b_n$.

Démonstration. Le système (11.4.2.1) est équivalent à l'équation

$$(11.4.2.3) \quad x_1A_1 + \dots + x_nA_n = B$$

où les vecteurs $A_1, \dots, A_n$ de K^n sont linéairement indépendants car $\det(A) \neq 0$. Ces vecteurs forment une base de K^n et par suite, il existe un système unique de scalaires $x_1, \dots, x_n$ (les composantes du vecteur B dans la base $(A_1, \dots, A_n)$) vérifiant (11.4.2.3).

Calculons le déterminant :

$$\Delta_i = \det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)$$

dans la base canonique de K^n .

Puisque l'application déterminant est une forme n -linéaire alternée, on a

$$\begin{aligned}\Delta_i &= \det \left(A_1, \dots, A_{i-1}, \sum_{k=1}^n x_k A_k, A_{i+1}, \dots, A_n \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_k, A_{i+1}, \dots, A_n) \\ &= x_i \det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n) = x_i \Delta.\end{aligned}$$

D'où, puisque $\Delta \neq 0$,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

11.4.2.2. Remarque

Les formules de Cramer conduisent souvent à des calculs pénibles de déterminants. Il est possible dans certains cas de s'en passer en recourant à une succession de combinaisons linéaires des lignes du système.

11.4.2.3. Exemple

Résoudre le système

$$(S) = \begin{cases} y + z = 1 & (1) \\ x + z = 2 & (2) \\ x + y = 0 & (3) \end{cases}$$

Le déterminant du système (S) est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

D'où, d'après les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{3}{2}.$$

On peut retrouver ces résultats plus rapidement en procédant de la façon suivante :

Additionnons les équations (1), (2) et (3) ; le système (S) est équivalent au système

$$\begin{cases} y + z &= 1 \\ x + z &= 2 \\ x + y + z &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

En retranchant la 2^e équation de la 3^e, on obtient $y = -\frac{1}{2}$, d'où $x = \frac{1}{2}$ d'après la 3^e équation de (S). Enfin $z = 1 - y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

11.5. Résolution d'un système linéaire quelconque

11.5.1. ÉQUATIONS PRINCIPALES. INCONNUES PRINCIPALES

Revenons maintenant au cas d'un système linéaire quelconque de m équations à n inconnues :

$$(11.5.1.1) \quad \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = b_j, \quad (1 \leq j \leq m).$$

Notons r le rang du système (11.5.1.1).

On sait qu'il existe une matrice carrée M inversible d'ordre r , extraite de la matrice A de ce système.

En changeant au besoin la numérotation des équations et des inconnues, on peut supposer que

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

On dit que le déterminant Δ de la matrice M est le **déterminant principal** du système. Les r premières équations sont les **équations principales** et les inconnues $x_1, \dots, x_r$ sont les **inconnues principales**, les autres inconnues étant les **inconnues non principales**.

11.5.2. CONDITION DE COMPATIBILITÉ ET RÉOLUTION

Comme nous l'avons vu, le système (11.5.1.1) s'écrit sous forme vectorielle :

$$x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = B.$$

Les vecteurs colonnes $A_1, \dots, A_n$ engendrent un sous-espace vectoriel E de K^m et le système n'est possible que si le vecteur B appartient à E . On est donc ramené à trouver une base de E ou, ce qui revient au même, à déterminer le rang r du système (11.5.1.1).

Le cas où $r = m = n$ ayant été traité au paragraphe 11.4, nous allons examiner les cas où $r = m < n$ puis $r < m$.

1^{er} cas : $r = m < n$. Si le rang du système (11.5.1.1) est égal au nombre d'équations, on a $E = K^m$ donc B , qui est un vecteur K^m , appartient à E et par suite le système est compatible quel que soit B .

Les vecteurs colonnes $A_1, \dots, A_m$ forment une base de K^m et on peut écrire le système sous la forme :

$$x_1A_1 + \cdots + x_mA_m = B - x_{m+1}A_{m+1} - \cdots - x_nA_n = B'.$$

Quelles que soient les valeurs données aux inconnues non principales $x_{m+1}, \dots, x_n$, le vecteur B' appartient à K^m . On peut donc l'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $A_1, \dots, A_m$. On obtient $x_1, \dots, x_m$ en résolvant par les formules des Cramer les m équations principales par rapport aux inconnues principales :

[illegible]

La résolution de ce système donne une solution unique en $x_1, \dots, x_m$ mais cette solution dépend des inconnues non principales $x_{m+1}, \dots, x_n$ qui ont des valeurs arbitraires dans K . On dit qu'il y a une **indétermination d'ordre $n - m$** .

2^e cas : $r < m$. D'après le choix de l'ordre des équations et de l'ordre des inconnues, les vecteurs $A_1, \dots, A_r$ sont linéairement indépendants; ils forment donc une base du sous-espace vectoriel E de K^m .

Donc si $r < m$, le système (11.5.1.1) est compatible si et seulement si le vecteur B appartient au sous-espace vectoriel E , donc (Théorème 11.2.0.4), si et seulement si les $m - r$ déterminants

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & b_k \end{vmatrix}$$

sont nuls pour tout $k \in \{r + 1, \dots, m\}$.

Les déterminants $\Delta_k (r + 1 \leq k \leq m)$ s'appellent les **déterminants caractéristiques** du système (11.5.1.1).

Supposons que le système Σ soit compatible.

a) Si $r = n$, les vecteurs $A_1, \dots, A_n$ forment une base du sous-espace vectoriel E . Le vecteur B s'exprime donc, d'une manière et d'une seule, comme combinaison linéaire de $A_1, \dots, A_n$:

$$x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = B.$$

On obtient $x_1, \dots, x_n$ par les formules de Cramer en résolvant les n équations principales par rapport aux n inconnues principales.

b) Si $r < n$, on peut écrire :

$$x_1A_1 + \cdots + x_rA_r = B - x_{r+1}A_{r+1} - \cdots - x_nA_n = B''.$$

Quelles que soient les valeurs données aux inconnues non principales $x_{r+1}, \dots, x_n$ le vecteur B'' appartient au sous-espace vectoriel E engendré par les vecteurs $A_1, \dots, A_n$. On peut donc l'exprimer de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $(A_1, \dots, A_r)$ de E . On obtient $x_1, \dots, x_r$ en résolvant, par les formules de Cramer, les r équations principales par rapport aux r inconnues principales :

[illegible]

La solution dépend alors des $n - r$ inconnues arbitraires $x_{r+1}, \dots, x_n$.

c) Lorsque le système (11.5.1.1) est compatible, toute solution est également solution du système (11.5.1.2). Ce qui précède montre que, réciproquement, toute solution de (11.5.1.2) est solution du système (11.5.1.1). Ces deux systèmes sont donc équivalents dans le cas où le système (11.5.1.1) admet des solutions.

Résumons l'étude qui vient d'être faite en énonçant le théorème suivant :

11.5.2.1. Théorème (Théorème de Rouché-Fontené)

Soit (S) un système de m équations linéaires à n inconnues, de rang r .

a) Si $r = m = n$, le système admet une solution unique.

b) Si $r = m < n$, le système admet des solutions que l'on obtient en donnant des valeurs arbitraires aux $n - m$ inconnues non principales et en résolvant le système de Cramer aux m inconnues principales.

c) Si $r < m$, le système admet des solutions si et seulement si les $m - r$ déterminants caractéristiques sont tous nuls. Lorsque cette condition est vérifiée, le système se réduit aux r équations principales que l'on résout comme au b).

11.5.2.2. Exemple

Résoudre le système

$$(S) \begin{cases} \alpha x & + 2z & = & 2 \\ x & + 2y & & = & 1 \\ x & - 2y & + \beta z & = & 1 \end{cases}$$

où α et β sont des paramètres réels.

Le déterminant du système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & \beta \end{vmatrix} = 2(\alpha\beta - 4).$$

1^{er} cas : Si $\alpha\beta \neq 4$, on a un système de Cramer. Les formules de Cramer (11.4.2.2) donnent

$$x = \frac{2(\beta - 2)}{\alpha\beta - 4}, \quad y = \frac{\beta(\alpha - 2)}{2(\alpha\beta - 4)}, \quad z = \frac{2(\alpha - 2)}{\alpha\beta - 4}.$$

2^e cas : Si $\alpha\beta = 4$, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha.$$

Ce déterminant étant non nul puisque $\alpha\beta = 4$, le système est de rang 2. Il y a un seul déterminant caractéristique qui doit être nul

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

On a $\Delta_3 = 4(\alpha - 2)$.

a) Si $\alpha \neq 2$, le système est impossible.

b) Si $\alpha = 2$, alors $\beta = 2$ puisque $\alpha\beta = 4$. Le système admet des solutions ; les inconnues principales sont x et y . Nous sommes ramenés à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x = 2 - 2z \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

qui est un système de Cramer. Les solutions sont

$$x = 1 - z, \quad y = \frac{z}{2} \quad \text{et } z, \text{ où } z \in \mathbb{R}.$$

11.6. Systèmes homogènes

Considérons un système linéaire homogène de la forme

$$\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i = 0 \quad (1 \leq j \leq m).$$

Avec les notations habituelles, ce système s'écrit :

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = 0.$$

Nous savons déjà qu'un tel système admet toujours au moins la solution banale $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$.

Soit r le rang du système. La résolution d'un système homogène se ramène toujours à celle du système des r équations principales ; tous les déterminants caractéristiques sont nuls car ils ont une colonne de zéros.

a) Si $r = n$, les vecteurs $A_1, \dots, A_n$ sont linéairement indépendants. Le système n'admet que la solution triviale.

b) Si $r < n$, les $n - r$ inconnues non principales sont arbitraires et le système est indéterminé. On le résout par la méthode générale du paragraphe 11.5. En résumé, nous avons :

11.6.0.1. Théorème

Pour qu'un système linéaire homogène admette des solutions autres que la solution triviale, il faut et il suffit que le rang de la matrice du système soit inférieur au nombre des inconnues.

En particulier, un système linéaire homogène de n équations à n inconnues admet des solutions autres que la solution banale si, et seulement si, le déterminant de la matrice du système est nul.

Il est clair que si $x_1, \dots, x_n$ est une solution non nulle d'un système linéaire homogène, $\lambda x_1, \dots, \lambda x_n$ où λ est un scalaire, est également une solution de ce système. Nous sommes donc amenés à chercher une solution non nulle quelconque d'un système homogène

$$(S) \quad a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = 0 \quad (1 \leq j \leq m).$$

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice du système (S).

Supposons par exemple que : $m = n$ et $r = n - 1$.

Il y a des solutions non nulles si $\det(A) = 0$. Par exemple, supposons que la matrice extraite de A par suppression de la dernière ligne et de la dernière colonne soit inversible. Soient $\Delta_{n1}, \dots, \Delta_{nn}$ les cofacteurs des éléments de la dernière ligne de A .

On sait (Théorème 11.1.0.2), que

$$a_{n1}\Delta_{n1} + \cdots + a_{nn}\Delta_{nn} = \det(A) = 0.$$

Donc $(\Delta_{n1}, \dots, \Delta_{nn})$ est une solution non nulle du système (S) . D'après la remarque précédente, $x_1 = \lambda\Delta_{n1}, \dots, x_n = \lambda\Delta_{nn}$, où λ est un scalaire quelconque, est une autre solution du système.

Supposons maintenant que : $m = n - 1$ et $r = n - 1$.

On se ramène au cas précédent en adjoignant à la matrice $A = (a_{ij})$ une $n^{\text{ème}}$ ligne arbitraire. Les cofacteurs $\Delta_{n1}, \dots, \Delta_{nn}$ des éléments de la dernière ligne de la nouvelle matrice obtenue ne sont pas tous nuls puisque le système est de rang $n - 1$. On montre comme précédemment que $(\Delta_{n1}, \dots, \Delta_{nn})$ est une solution non nulle du système considéré.

11.6.0.2. Exemple

Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

La matrice du système est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

elle est de rang 2, donc le système admet des solutions autres que la solution nulle.

En appliquant la méthode précédente, on voit qu'une solution non nulle est :

$$x_0 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad y_0 = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad z_0 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

d'où la solution générale

$$x = -5\lambda, \quad y = -\lambda, \quad z = 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

PROBLÈMES

1

I. Dans tout le problème on désigne par E un espace vectoriel réel. On note I l'application identique de E .

1°) E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , on définit une application f de E dans E de la façon suivante :

Si $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on pose

$$f(x) = x_1 - x_2.$$

a) Montrer que f est une application linéaire et que l'on a $f^2 = I$.

b) Déterminer les noyaux des applications linéaires

$$u = \frac{I - f}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{I + f}{2}.$$

et les sous-espaces vectoriels $u(E)$ et $v(E)$. Evaluer u^2 , v^2 , uv et vu .

2°) Réciproquement soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = I$. On pose

$$u = \frac{I - f}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{I + f}{2}.$$

Montrer que $u(E)$ et $v(E)$ sont stables par f et sont deux sous-espaces supplémentaires de E .

Montrer que f peut être obtenu de la manière considérée ci-dessus au 1°).

3°) On suppose maintenant que E est de dimension finie n .

a) Trouver la matrice A de l'application linéaire f . En déduire que l'application transposée de f s'obtient de la même manière que f .

b) Soit I_n la matrice unité d'ordre n et soit λ un scalaire. Former le polynôme $P(\lambda) = \text{Dét}(A - \lambda I_n)$ et trouver ses racines.

II. Soient a et b deux nombres réels distincts.

1°) E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , on définit une application de E dans E de la façon suivante :

Si $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on pose $f(x) = ax_1 + bx_2$.

a) Montrer que f est une application linéaire et que l'on a :

$$f^2 - (a + b)f + abI = 0.$$

b) Déterminer les noyaux des applications linéaires

$$u = \frac{f - aI}{b - a} \text{ et } v = \frac{f - bI}{a - b}$$

et les sous-espaces vectoriels $u(E)$ et $v(E)$.

2°) Calculer u^2, v^2, uv et vu .

Calculer f en fonction de u et v ; en déduire f^n pour n entier > 0 .

3°) Montrer que si $ab \neq 0$, alors f est inversible. Exprimer alors f^{-1} à l'aide de u et v .

4°) Inversement, soit f un endomorphisme de E tel que :

$$f^2 - (a + b)f + abI = 0.$$

a) Montrer qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires F et G tels que f puisse être défini comme il a été dit au II, 1°) à partir de F et G .

N.B. Les deux parties de ce problème sont indépendantes mais il est conseillé de résoudre d'abord la partie I.

DUES MP1, Abidjan, Juin 1969.

2

I. Soit $x \in \mathbb{R}^4$. On pose :

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad tx = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On désigne par G le sous-ensemble de $M_4(\mathbb{R})$ formé des matrices M qui laissent invariante la forme quadratique

$$f(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

(on dit que $f(x)$ est invariante par la matrice M , si la relation $y = Mx$ implique $y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$).

1°) Montrer que $f(x) = {}^t x J x$ et que si $M \in G$, on a ${}^t M J M = J$ où ${}^t M$ est la transposée de M . En déduire que si $M \in G$, $M = (a_{ij})$, on a $a_{11}^2 \geq 1$ et $\det(M) = \pm 1$.

2°) Montrer que G est un groupe multiplicatif.

3°) Soit $M \in G$. Calculer l'expression $(MJ)({}^t M J M)(M^{-1}J)$ et montrer que ${}^t M \in G$.

II. On rappelle qu'une matrice carrée A à éléments complexes est dite hermitienne si $A^* = A$ où A^* est la matrice ${}^t \bar{A}$ ($\bar{A}$ est la matrice complexe conjuguée de A). Quelle est la forme générale des matrices carrées hermitiennes d'ordre 2?

1°) On associe à tout point $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, la matrice

$$X = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_0 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que X est hermitienne et que réciproquement, toute matrice hermitienne est de cette forme.

2°) On note $SL(2, \mathbb{C})$ le sous-ensemble de $M_2(\mathbb{C})$ formé des matrices dont le déterminant est égal à 1. Si $g \in SL(2, \mathbb{C})$, on pose $X' = gXg^*$.

Montrer que X' peut se mettre sous la forme

$$X' = \begin{pmatrix} x'_0 + x'_1 & x'_2 + ix'_3 \\ x'_2 - ix'_3 & x'_0 - x'_1 \end{pmatrix}$$

avec x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 réels et $i = \sqrt{-1}$.

3°) On considère la matrice $T(g)$ qui, à (x_0, x_1, x_2, x_3) associe le vecteur (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) .

Montrer que $T(g) \in G$ et que l'application $g \mapsto T(g)$ est un homomorphisme de $SL(2, \mathbb{C})$ dans G . Quel est le noyau de cet homomorphisme?

DUES MP1, Abidjan, Juin 1971

3

I. On note G l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par $f_{a,b}(x) = ax + b$, où $a > 0$ et b sont des nombres réels.

COURS D'ALGÈBRE

1°) Montrer que $f_{a,b}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa bijection réciproque ?

2°) Montrer que G est un groupe pour la composition des applications. Est-il abélien ?

3°) Soient H l'ensemble des éléments de G de la forme $f_{a,0}$ et K l'ensemble des éléments de G de la forme $f_{1,b}$.

Montrer que :

a) Tout élément de G peut s'écrire comme composé d'un élément de H par un élément de K .

b) H est un sous-groupe de G isomorphe à $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

c) K est un sous-groupe distingué de G isomorphe à $\mathbb{R}$.

II. Soit K un corps commutatif.

1°) Montrer qu'il existe un homomorphisme unique f de l'anneau $\mathbb{Z}$ dans l'anneau K tel que $f(1) = 1$.

2°) Montrer que le noyau de f est un idéal I de $\mathbb{Z}$ tel que, quels que soient $x, y \in \mathbb{Z}$, la relation $xy \in I$ implique $x \in I$ ou $y \in I$.

En déduire que $I = \{0\}$ ou $I = p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier.

3°) On pose $K' = f(\mathbb{Z})$. Démontrer que :

a) Si $I = \{0\}$, alors K' est un sous-anneau de K ;

b) Si $I = p\mathbb{Z}$, alors K' est un sous-corps de K .

4°) Montrer que si A est un sous-anneau de K , K' est inclus dans A .

DUES MP1, Abidjan, Janvier 1986

4

I. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif. On dit qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est triviale si $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

1°) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est triviale.

b) $\text{Ker}(f) = E$.

c) $\text{Im}(f) = \{0\}$.

2°) Etant donnée une suite

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_3 \longrightarrow \dots \longrightarrow E_n \xrightarrow{f_n} E_{n+1}$$

d'espaces vectoriels sur un même corps commutatif et d'applications linéaires $f_k : E_k \longrightarrow E_{k+1}$, on dit que cette suite est exacte si pour $1 \leq k < n$, on a

$$\text{Im}(f_k) = \text{Ker}(f_{k+1}).$$

On note $\{0\}$ l'espace vectoriel réduit à 0.

a) Montrer que si $E_1 = \{0\}$ (resp. $E_{n+1} = \{0\}$), f_1 (resp. f_n) est l'application triviale que l'on n'écrit pas dans la suite.

b) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que les suites suivantes soient exactes

$$\begin{aligned} \{0\} &\longrightarrow E \xrightarrow{f} F \\ E &\xrightarrow{f} F \longrightarrow \{0\} \\ \{0\} &\longrightarrow E \xrightarrow{f} F \longrightarrow \{0\} \end{aligned}$$

3°) Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E . Montrer que la suite

$$\{0\} \longrightarrow E_1 \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} E/E_1 \longrightarrow \{0\}$$

(où j est l'injection canonique et π la surjection canonique) est exacte.

4°) Soit

$$\{0\} \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} E/\text{Ker}(f) \xrightarrow{\bar{f}} f(E) \xrightarrow{j} F \longrightarrow \{0\},$$

la suite de décomposition canonique de l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$. Est-elle exacte ?

II. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1°) Calculer A^n pour n entier ≥ 1 . (On pourra écrire $A = I_3 + B$, où I_3 désigne la matrice unité d'ordre 3.)

2°) Soient (x_n) , (y_n) et (z_n) trois suite définies par les relations

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}$$

$$y_n = y_{n-1} + z_{n-1}$$

$$z_n = z_{n-1}$$

et la donnée de x_0, y_0, z_0 .

Calculer x_n, y_n, z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et de n .

DUES MP1, Abidjan, Mars 1986

5

I. Soit A un anneau (unitaire), 1 son élément unité. On appelle dérivation de A toute application d de A dans A telle que

a) $d(x + y) = d(x) + d(y)$

b) $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ quels que soient $x, y \in A$.

1°) Montrer que la dérivation ordinaire des polynômes à coefficients réels est une dérivation de $\mathbb{R}[X]$.

2°) Soient d_1 et d_2 deux dérivations de A .

a) Montrer que $d_1 + d_2$ est une dérivation de A .

b) L'application $d_1 \circ d_2$ est-elle une dérivation de A ?

Montrer que l'application $[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$ est une dérivation de A .

3°) On suppose désormais que A est commutatif. On pose $d^0 = 1_A$, $d^1 = d$ et par récurrence sur n , $d^n = d \circ d^{n-1}$. Montrer que l'on a

$$d^n(xy) = \sum_{k=0}^n C_n^k d^k(x) d^{n-k}(y)$$

quels que soient $x, y \in A$ et $n \in \mathbb{N}$

4°) On suppose désormais que A est intègre et de caractéristique p . Montrer que d^p est une dérivation de A .

DUES MP1, Abidjan, Juin 1986 (extrait)

6

I. On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

1°) Montrer que l'ensemble G des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ à coefficients complexes tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$ est un groupe multiplicatif.

Montrer que $G = \{g \in M_2(\mathbb{C}) : g^* J g = J \text{ et } \det(g) = 1\}$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et où $g^* = {}^t \bar{g}$ est l'adjointe de g .

2°) Soit $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Pour tout $g \in G$ et pour tout $z \in D$, on pose

$$\psi_g(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}.$$

Montrer que ψ_g est une application de D dans D et que l'application $g \mapsto \psi_g$ est un homomorphisme. Trouver le sous-groupe K de G tel que $\psi_g(0) = 0$ pour tout $g \in K$.

3°) On pose

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

et on considère l'automorphisme intérieur de $GL(2, \mathbb{C})$ défini par $\sigma(g) = CgC^{-1}$.

Montrer que $\sigma(g) \in G$ si et seulement si g appartient au groupe multiplicatif G' formé des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont réels et vérifient $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$.

Quelle est l'image par σ du sous-groupe N de G' formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\xi \in \mathbb{R}$?

II. On se donne trois nombres réels différents a, b, c et le polynôme en X :

$$P(X) = X^3 + X^2z + Xy + x.$$

En considérant le système d'équations

$$(1) \quad \begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 \end{cases}$$

montrer que $P(X)$ est divisible par le polynôme $(X - a)(X - b)(X - c)$.

En déduire la solution du système (1). Retrouver cette solution par une méthode directe.

7

I. Soit A un anneau commutatif unitaire. Soient I et J deux idéaux de A . On pose

$$I + J = \{x + y : x \in I \text{ et } y \in J\}.$$

1°) Montrer que :

a) $I + J$ et $I \cap J$ sont des idéaux de A .

b) $I + J = A$ si et seulement si, il existe $a \in I$, il existe $b \in J$ tels que $a + b = 1$.

2°) On note

$$IJ = \left\{ a \in A / \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, \dots, x_n \in I, \exists y_1, \dots, y_n \in J \text{ et } a = \sum_{i=1}^n x_i y_i \right\}.$$

Montrer que IJ est un idéal de A et que $IJ \subset I \cap J$.

II. Soit A un anneau. Quels que soient $x, y \in A$, on pose

$$[x, y] = xy - yx.$$

1°) Démontrer l'identité :

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

2°) On considère des éléments x, y, h vérifiant les relations

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h.$$

Etablir les formules $[h, x^n] = 2nx^n, \quad [h, y^n] = -2ny^n$.

3°) Soit a un élément de A . On considère l'application u de A dans A donnée par

$$u(x) = [a, x] \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Montrer que si $a^2 = 0$, on a $u^3(x) = 0$ pour tout $x \in A$, et que si $a^3 = 0$, on a $u^5(x) = 0$ pour tout $x \in A$.

Montrer que l'on a :

$$u^n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} x a^k \quad \text{pour tout } x \in A.$$

8

I. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note $Tr(A)$ la trace de la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1°) a) Montrer que l'application $A \mapsto Tr(A)$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ et que $Tr(AB) = Tr(BA)$ quelles que soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $Tr(P^{-1}AP) = Tr(A)$ si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL(n, \mathbb{R})$. En déduire que si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n , B une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, la trace de la matrice de u par rapport à la base B est indépendante de cette base.

2°) Si A et B sont deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$, on pose $[A, B] = AB - BA$.

Montrer que

a) $[A, A] = 0$ et $[B, A] = -[A, B]$.

b) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

c) Que vaut $Tr([A, B])$?

3°) Soit A une matrice fixée dans $M_n(\mathbb{R})$. On pose

$$f(X) = [A, X] \text{ pour toute matrice } X \in M_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ et que

$$f([X, Y]) = [f(X), Y] + [X, f(Y)]$$

quelles que soient X et Y dans $M_n(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser 2°, b)).

4°) a) Montrer que l'ensemble F des matrices carrées réelles d'ordre 2 de trace nulle est un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est formée des matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que si A et B sont dans F , alors $[A, B] \in F$.

c) Ecrire la matrice de l'endomorphisme f du 3°) par rapport à la base (I, J, K) .

II. Soit z un nombre complexe non nul. On pose $x = z + \frac{1}{z}$.

1°) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $z^n + \frac{1}{z^n}$ est un polynôme $P_n(x)$ de degré n en x à coefficients entiers et que pour $n \geq 2$, on a la relation

$$P_n - xP_{n-1} + P_{n-2} = 0.$$

2°) On suppose que $x = 2 \cos \theta$, où θ est un nombre réel. Calculer la valeur de $P_n(X)$. En déduire que pour $-2 \leq x \leq 2$ et pour tout $n \geq 2$, on a

$$(4 - x^2)P_n'' - xP_n' + n^2P_n = 0.$$

DUES MP1, Abidjan, Juin 1987

9

I. On considère le polynôme P à coefficients dans $\mathbb{R}$ défini par :

$$P(x) = x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

1°) Déterminer les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{C}$. En déduire la décomposition de $P(x)$ en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[x]$.

2°) Donner la décomposition de $P(x)$ en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$. (On pourra discuter, suivant les valeurs de α , le nombre des racines réelles de $P(x)$).

3°) On considère $F(x)$ définie par : $F(x) = \frac{x^2}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1}$. Donner la décomposition de $F(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}$. (Plusieurs cas sont à considérer. On utilisera la question 2° /).

4°) Calculer le P.G.C.D. des polynômes P et Q , où Q est défini par :

$$Q(x) = x^8 - 2x^4 \cos 4\alpha + 1.$$

II. On considère l'équation $(E_1) : x^2 - bx + c = 0$, où x est l'inconnue, b et c étant deux éléments de $\mathbb{Z}$ vérifiant $b^2 - 4c < 0$.

α étant un élément de $\mathbb{C}$, on définit Z_α , ensemble des nombres complexes de la forme $z = p + q\alpha$, où p et q sont des éléments de $\mathbb{Z}$.

1°) Montrer que si α est racine de (E_1) alors Z_α est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ muni des opérations usuelles et que G_α , ensemble des éléments de Z_α inversibles pour la multiplication, est un groupe multiplicatif.

2°) Si α et $\bar{\alpha}$ sont les 2 racines de (E_1) montrer que $Z_\alpha = Z_{\bar{\alpha}}$.

3°) On considère l'application f de Z_α dans $\mathbb{N}$ définie par : $\forall z \in Z_\alpha, f(z) = |z|^2$ (où $|z|$ désigne le module de z). Soit α une racine de (E_1) .

Montrer que si $z = p + q \propto$, alors $f(z) = p^2 + bpq + cq^2$. Quelle est l'image par f du groupe $G_\propto$?

En déduire que si $z = p + q \propto$ est un élément de $G_\propto$, alors on a :

$$0 \leq q^2(4c - b^2) \leq 4$$

(on pourra considérer l'équation $(E_2) : x^2 + bqx + cq^2 - 1 = 0$ qui admet p pour racine dans $\mathbb{Z}$).

4°) Quelles sont les valeurs possibles de $b^2 - 4c$? En déduire la détermination des éléments du groupe $G_\propto$ suivant les valeurs de $b^2 - 4c$.

DUES MP1, Abidjan, Septembre 1987 (extrait)

10

I. Soient G un groupe noté multiplicativement et A une partie de G . On appelle **centralisateur** de A dans G , l'ensemble $C(A)$ des $x \in G$ tels que $xa = ax$ pour tout $a \in A$. On appelle **normalisateur** de A dans G , l'ensemble $N(A)$ des $x \in G$ tels que $xAx^{-1} = A$.

1°) Montrer que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de G et que $N(A)$ est un sous-groupe de G .

2°) Pour tout a fixé dans G , on considère l'application $f_a : G \longrightarrow G$ définie par $f_a(x) = axa^{-1}$. On note G' l'ensemble des applications de la forme f_a .

a) Montrer que G' est un groupe pour la composition des applications.

b) Montrer que $a \longmapsto f_a$ est un homomorphisme de G sur G' . Quel est son noyau ?

c) En déduire que G' est isomorphe à G/C où C est le centralisateur de G .

II. Soit A un anneau. On dit qu'un élément $x \in A$ est nilpotent s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$.

1°) Montrer que, si A ne possède pas de diviseur de zéro, le seul élément nilpotent de A est 0.

2°) Montrer que, si deux éléments nilpotents x et y de A commutent, alors $x + y$ et xy sont nilpotents (pour $x + y$, on utilisera la formule du binôme avec un exposant convenable).

3°) Montrer que si deux éléments a et b de A commutent, on a

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

pour tout entier $n \geq 1$.

En déduire que si x est un élément nilpotent de A , alors $1_A - x$ est inversible dans A et déterminer $(1_A - x)^{-1}$.

DUES MP1, Abidjan, Février 1988 (extrait)

11

I. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u(e_1) = -e_2 - e_3 \sin \theta$$

$$u(e_2) = e_1 + e_3 \cos \theta$$

$$u(e_3) = -e_1 \sin \theta + e_2 \cos \theta$$

où θ est un nombre réel donné.

1°) Ecrire la matrice A de u par rapport à la base (e_1, e_2, e_3) . Calculer A^3 et en déduire que $u^3 = 0$.

2°) A tout nombre réel t , on associe l'endomorphisme f_t de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f_t = Id + tu + \frac{t^2}{2} u^2$$

où Id désigne l'application identique de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que pour tout couple (t, t') de nombres réels, on a $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'}$.

Que peut-on en déduire pour la structure de l'ensemble des endomorphismes f_t , lorsque t parcourt $\mathbb{R}$?

3°) On pose $e'_1 = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$, $e'_2 = u(e_1)$, $e'_3 = u(e_2)$.

a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice M de u par rapport à la base (e'_1, e'_2, e'_3) .

II. On pose
$$P_n(X) = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{X}{n}\right)^n$$

où n est un entier ≥ 0 .

Factoriser $P_n(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

DUES MP1, Abidjan, Juin 1988 (extrait)

12

I. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1°) Montrer les implications :

$$g \circ f \text{ injective} \implies f \text{ injective}$$

$$g \circ f \text{ surjective} \implies g \text{ surjective.}$$

2°) En déduire que, s'il existe deux applications s et h de F dans E telles que

$$s \circ f = id_E \quad \text{et} \quad f \circ h = id_F \quad \text{alors} \quad s = h.$$

II. Soit G l'ensemble des couples (a, b) de nombres rationnels non simultanément nuls.

On définit la loi $*$ de la façon suivante : pour $(a, b) \in G$ et $(a', b') \in G$ on pose

$$(a, b) * (a', b') = (aa' - 3bb', ab' + a'b).$$

1°) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G .

2°) Etudier les propriétés de $*$ dans G . Quelle est la structure de $(G, *)$?

3°) Soit $K = \{x \in \mathbb{R} / \exists (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (a, b) \neq (0, 0) \text{ et } x = a + b\sqrt{3}\}$. K est muni de la multiplication des réels.

Quelle est la structure de $(K, \times)$?

4°) On considère $f : (G, *) \longrightarrow (K, \times)$ définie par

$$f((a, b)) = a + b\sqrt{3}. \quad f \text{ est-il un morphisme ?}$$

III. Soit A un anneau commutatif et soit ξ l'ensemble des idéaux de A . Pour $I \in \xi$ et $J \in \xi$, on pose :

$$I * J = \{x \in A / \forall j \in J, \quad j \cdot x \in I\}.$$

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés de la loi $*$.

— A —

1°) Montrer : $\forall I \in \xi, \quad \forall J \in \xi, \quad I \subset I * J.$

COURS D'ALGÈBRE

2°) Pour $I \in \xi$ déterminer

a) $I * I$.

b) $I * A$.

c) $I * (0)$.

3°) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans ξ .

– B –

Dans toute la partie – B –, on se placera dans le cas particulier où l'anneau A est égal à $\mathbb{Z}$.

1°) Soient p et q deux nombres premiers entre eux. Montrer que :

$$p\mathbb{Z} * a\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}.$$

2°) Soient m et n deux entiers naturels, non nuls, tels que m soit un multiple de n . Montrer que $n\mathbb{Z} * m\mathbb{Z} = A$.

3°) a) La loi $*$ est-elle commutative ?

b) La loi $*$ est-elle associative ?

– C –

Dans la partie – C –, A est un anneau commutatif quelconque.

Montrer que $\forall I \in \xi, \quad \forall J \in \xi, \quad \forall K \in \xi$

1°) $I * (J + K) = (I * J) \cap (I * K)$.

2°) $(I \cap J) * K = (I * K) \cap (J * K)$.

DUES MP1, Abidjan, Février 1989

13

I. On note $\mathbb{C}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients complexes. Si

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$$

est un élément de $\mathbb{C}[X]$ et si A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes, on pose

$$P(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_p A^p,$$

où I désigne la matrice unité d'ordre n . On dit qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ est annulateur de la matrice A si $P(A)$ est la matrice nulle.

1°) Montrer que l'ensemble $M_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes est un espace vectoriel de dimension n^2 .

Montrer que toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ admet un polynôme annulateur non nul. (On pourra considérer les $n^2 + 1$ matrices $I, A, A^2, \dots, A^{n^2}$.)

2°) Soit A un élément de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{C}[X] \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(P) = P(A)$ est un homomorphisme d'algèbres dont l'image est une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{C})$ et dont le noyau est l'ensemble des polynômes annulateurs de A .

3°) On appelle polynôme minimal de la matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ le polynôme unitaire annulateur de A de plus bas degré. Montrer qu'il est unique.

4°) Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et soit P le polynôme minimal de A . Montrer que A est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

Montrer qu'un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ est annulateur de A si et seulement si P divise Q .

DUES MP1, Abidjan, Juin 1989 (extrait)

14

I. Rappeler la définition d'un anneau principal. Soit K un corps commutatif; montrer que l'anneau $K[X]$ est principal.

II. Dans tout le problème, on note $H = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, où $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes. Si $h = (a, \alpha) \in H$ et $h' = (b, \beta) \in H$, on pose :

$h + h' = (a + b, \alpha + \beta)$, $h \cdot h' = (a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (ab - \alpha \bar{\beta}, a\beta + \alpha \bar{b})$ où $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z .

1°) Montrer que $(H, +)$ est un groupe abélien, que $(1, 0)$ est l'élément neutre pour la multiplication et que $(H, +, \cdot)$ est un anneau. Est-il commutatif?

2°) Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow H$ définie par $\Phi(a) = (a, 0)$ est un homomorphisme injectif d'anneaux. En déduire que l'ensemble des éléments de H de la forme $(a, 0)$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$. Dans la suite on identifiera le nombre complexe z et l'élément $(z, 0)$ de H .

Calculer $(\alpha, 0) \cdot (0, 1)$ et en déduire que tout élément (a, α) de H s'écrit de façon unique $(a, \alpha) = a + \alpha \omega$, avec $\omega = (0, 1)$.

Calculer ω^2 puis montrer que $\omega a = \bar{a} \omega$ pour tout $a \in \mathbb{C}$.

3°) Soit $Z(H)$ le centre de H . Montrer qu'un élément $h = a + \alpha \omega$ de H appartient à $Z(H)$ si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha = 0$.

4°) On définit le conjugué d'un élément $h = a + \alpha \omega$ de H en posant : $\bar{h} = \bar{a} - \alpha \omega$.

Montrer que, quel que soit $(h, h') \in H^2$, on a : $\overline{h + h'} = \bar{h} + \bar{h'}$; $\overline{\bar{h}} = h$ et $\overline{h \cdot h'} = \bar{h'} \cdot \bar{h}$.

Pour $h \in H$, on pose $N(h) = h \cdot \bar{h}$. Montrer que : $N(h) = \bar{h} \cdot h = a\bar{a} + \alpha \bar{\alpha}$ et que $N(h) \geq 0$ pour tout h dans H . A quelle condition a-t-on $N(h) = 0$? En déduire que H est un corps non commutatif.

5°) En utilisant la relation : $\forall (h, h') \in H^2, \overline{h \cdot h'} = \bar{h'} \cdot \bar{h}$, montrer que $N(h \cdot h') = N(h) \cdot N(h')$. En déduire que l'ensemble G des éléments de H tels que $N(h) = 1$ est un groupe multiplicatif.

III. P est un plan affine rapporté à un repère $R = (0, \vec{i}, \vec{j})$. On rappelle que l'équation cartésienne d'une droite D de P est de la forme $D : ux + vy + h = 0$ où u et v ne sont pas tous les deux nuls.

Δ est la droite d'équation $x = 0$ et on note $P' = P - \Delta$. Dans P on définit la loi de composition interne, notée $*$ par : si M a pour coordonnées (x, y) , M' a pour coordonnées (x', y') , alors $M * M'$ est le point de P de coordonnées $(xx', xy' + y)$.

1°) a) Montrer que la loi $*$ est associative dans P .

b) Montrer qu'il existe un point E de P élément neutre pour $*$.

2°) Déterminer l'ensemble des points M de P qui admettent un symétrique pour la loi $*$. Ce symétrique, s'il existe sera noté M^{-1} . Déterminer les coordonnées de M^{-1} en fonction de celles de M .

3°) Quelle est la structure de $(P', *)$?

4°) Soit A un point de P fixé, de coordonnées (a, b) et soit H_A l'ensemble des points de P' qui commutent avec A , c'est-à-dire : $H_A = \{M \in P' / A * M = M * A\}$.

a) Déterminer l'équation cartésienne de H_A .

b) Dans quel cas a-t-on $H_A = P'$?

c) On suppose désormais que A est tel que $H_A \neq P'$. Quelle est la nature de H_A ? Montrer que $(H_A, *)$ est un sous-groupe commutatif de $(P', *)$.

Bibliographie

- (1) *Cours de mathématiques—1, algèbre*, J.M. ARNAUDIES et H. FRAYSSE, Dunod Université, Paris, 1987.
- (2) *Cours de mathématiques du premier cycle, 1^{ère} et 2^e années*, J. DIXMIER, Gauthier-Villars, Paris 1976.
- (3) *Nouveau cours de mathématiques tomes 1, 2 et 3*, A. DONEDDU, Vuibert, Paris, 1982.
- (4) *Cours d'algèbre*, R. GODEMENT, Hermann, Paris, 1973.
- (5) *Fundamental Structures of Algebra*, G.D. MOSTOW, J.H. SAMPSON, J.-P. MEYER, Mc Graw-Hill Book Company, New-York, 1963.
- (6) *Algèbre, M.P. et Spéciales AA'*, M. QUEYSANNE, Armand Colin, Paris, 1964.
- (7) *Cours d'algèbre*, J.L. ROQUE, Chr. LEBOEUF, G. CHASSARD et J. GUEGAND, Edition Marketing, Paris, 1980.

Imprimé en France par I.M.E. - 25-Baume-les-Dames
Dépôt légal n° 4655-10/1991
Collection n° 49 - Edition n° 01
59/4306/3

Universités francophones est la collection de l'Université des réseaux d'expression française (UREF). Cette dernière, qui fonctionne au sein de l'AUPELF comme une Université sans murs, a été choisie par le Sommet des Chefs d'État et de gouvernement des pays ayant en commun l'usage du français comme l'opérateur privilégié du Sommet en matière d'enseignement supérieur et de recherche.

Cette collection de manuels universitaires et d'ouvrages de référence s'adresse à tous les étudiants francophones. Elle est appelée à constituer une bibliothèque universitaire en langue française dont les ouvrages sont proposés à des prix modérés.

Cet ouvrage de base a pour but d'exposer le plus simplement possible, mais de façon rigoureuse, les principaux résultats d'algèbre générale et d'algèbre linéaire. Il s'adresse aux étudiants en mathématiques du premier cycle des Universités et aux étudiants préparant l'entrée dans les grandes écoles scientifiques. Il peut également être utile aux scientifiques qui désirent se recycler en mathématiques et à tous ceux qui veulent acquérir de bonnes connaissances de base en algèbre.

L'auteur s'est efforcé de faire un exposé qui soit assez rigoureux et assez riche pour servir de base à une solide formation mathématique.

Une série de problèmes posés aux examens de MP_1 sont placés à la fin de l'ouvrage.

★
★ ★

Saliou TOURÉ est né à Kolia (Côte d'Ivoire) en 1937. Docteur ès Sciences mathématiques, il a enseigné dans de nombreuses Universités africaines, européennes et américaines. Depuis 1976, il est professeur titulaire de mathématiques à la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université d'Abidjan. Il est également Directeur de l'Institut de Recherches Mathématiques d'Abidjan (IRMA) depuis 1975, Président de la Société Mathématique de Côte-d'Ivoire depuis 1977, Secrétaire Général de l'Union Mathématique Africaine depuis 1986, Vice-Président de l'Union Panafricaine de la Science et de la Technologie depuis 1990. Son domaine de recherche est l'analyse harmonique sur les groupes de Lie.

Prix France : 100 FF • Prix préférentiel UREF (Afrique, Asie, Amérique latine, Moyen-Orient, Haïti) : 50 FF



I.S.S.N. 0993-3948
Diffusion EDICEF ou ELLIPSES selon pays
Distribution Canada D.P.L.U.

59/4306/3
Imprimé en France
S.S.Q.I. - PARIS